

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»  
(ДГТУ)**

Факультет «Автоматизация, мехатроника и управление»  
Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

«Основы механики технологических процессов и оборудования»

Конспект лекций

Ростов-на-Дону  
2022

УДК 62-52

Составитель: Быкадор В.С.

Конспект лекций. – Ростов-на-Дону : Донской гос. техн. ун-т,  
2022. – с.

Конспект лекций по дисциплине «Основы механики технологических процессов и оборудования» предназначены для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» профиль «Автоматизация технологических процессов и производств в машиностроении».

УДК 62-52

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Донского государственного технического университета

---

В печать \_\_\_\_\_.\_\_\_\_.20\_\_ г.  
Формат 60x84/16. Объем \_\_\_\_\_ усл. п. л.  
Тираж \_\_\_\_\_ экз. Заказ № \_\_\_\_\_.

---

Издательский центр ДГТУ  
Адрес университета и полиграфического предприятия:  
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

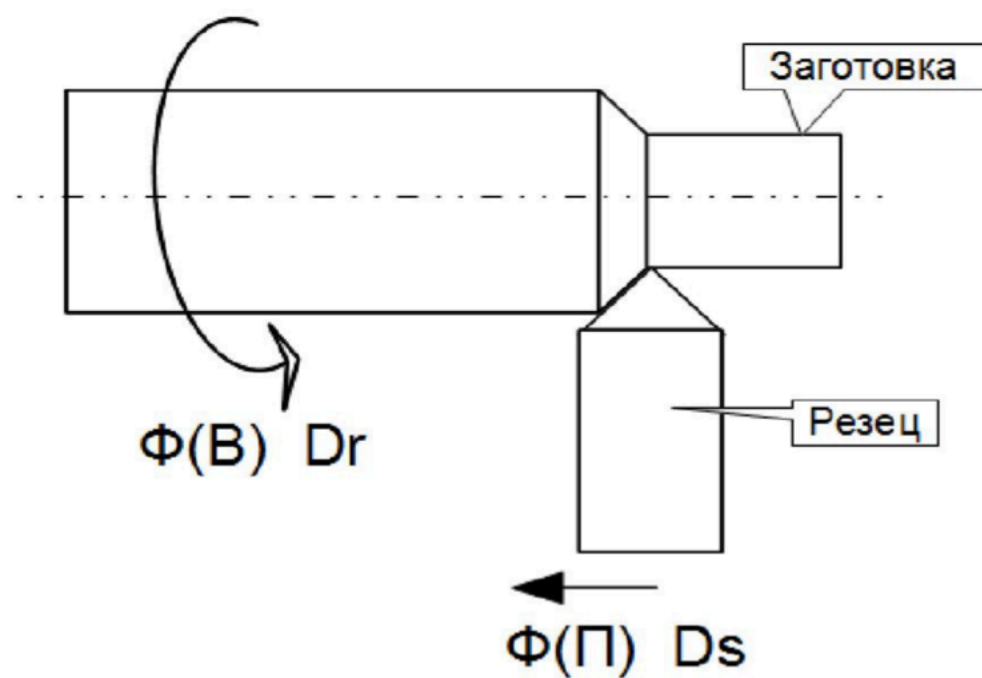
© Донской государственный  
технический университет, 2022



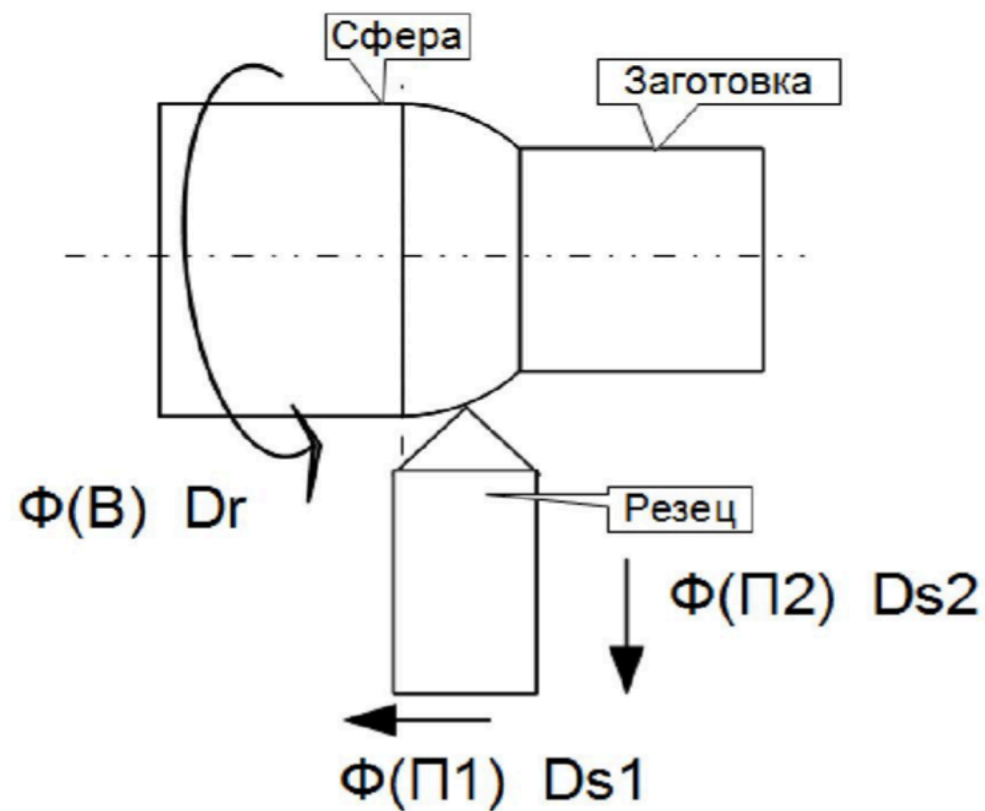
# ЛЕКЦИЯ №1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РЕЗАНИЯ МЕТАЛЛОВ

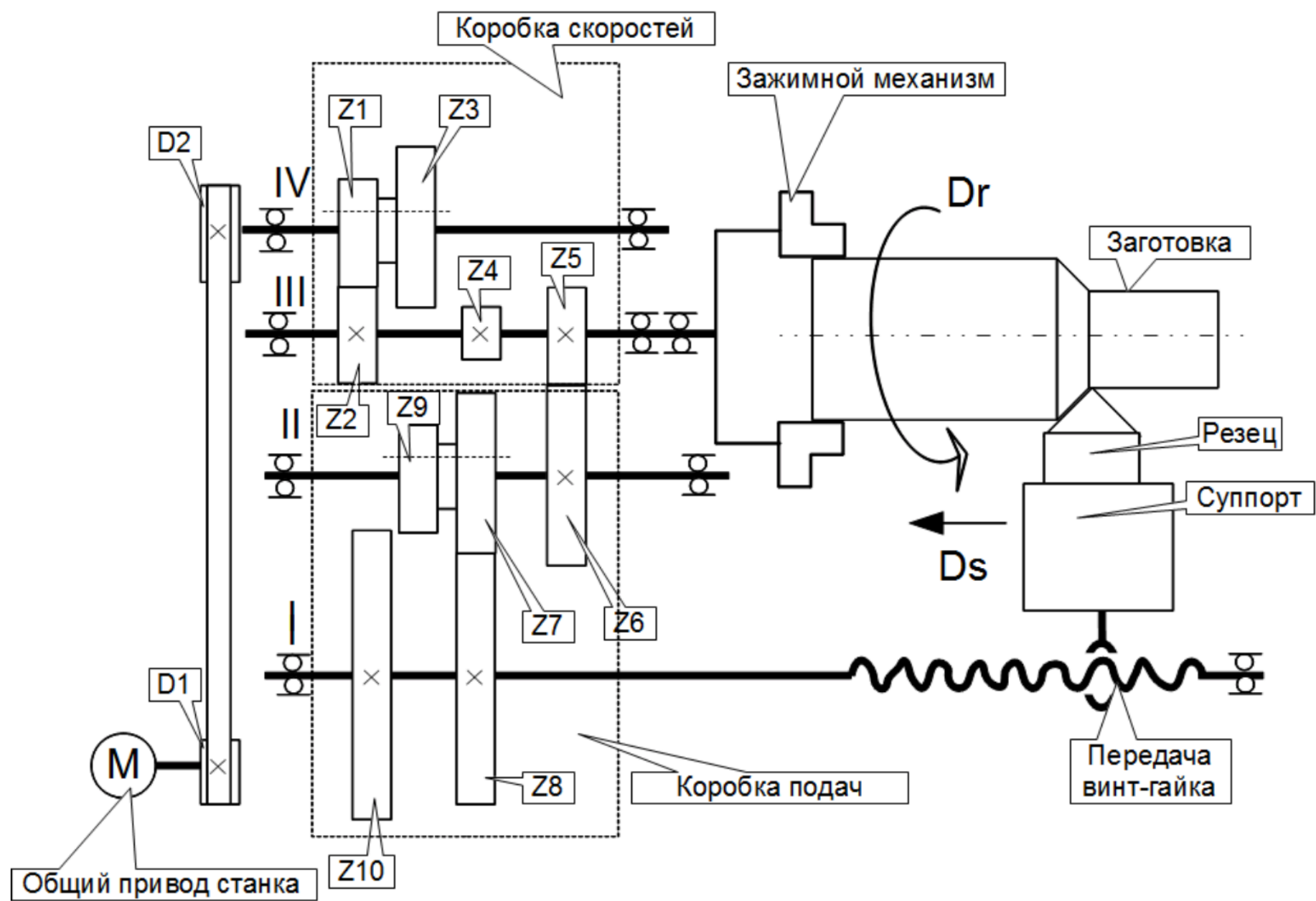
# Кинематические связи в металлорежущих станках

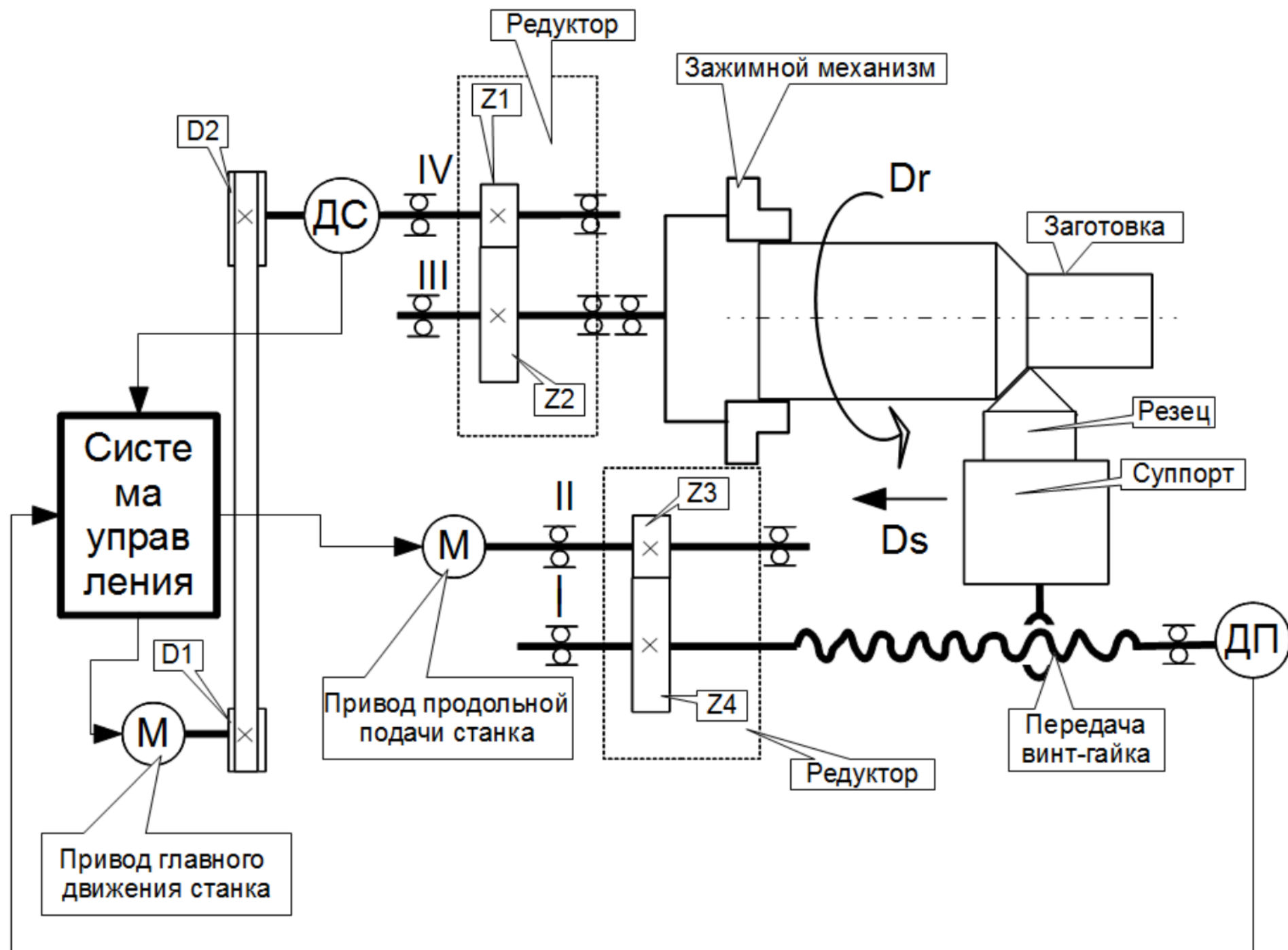


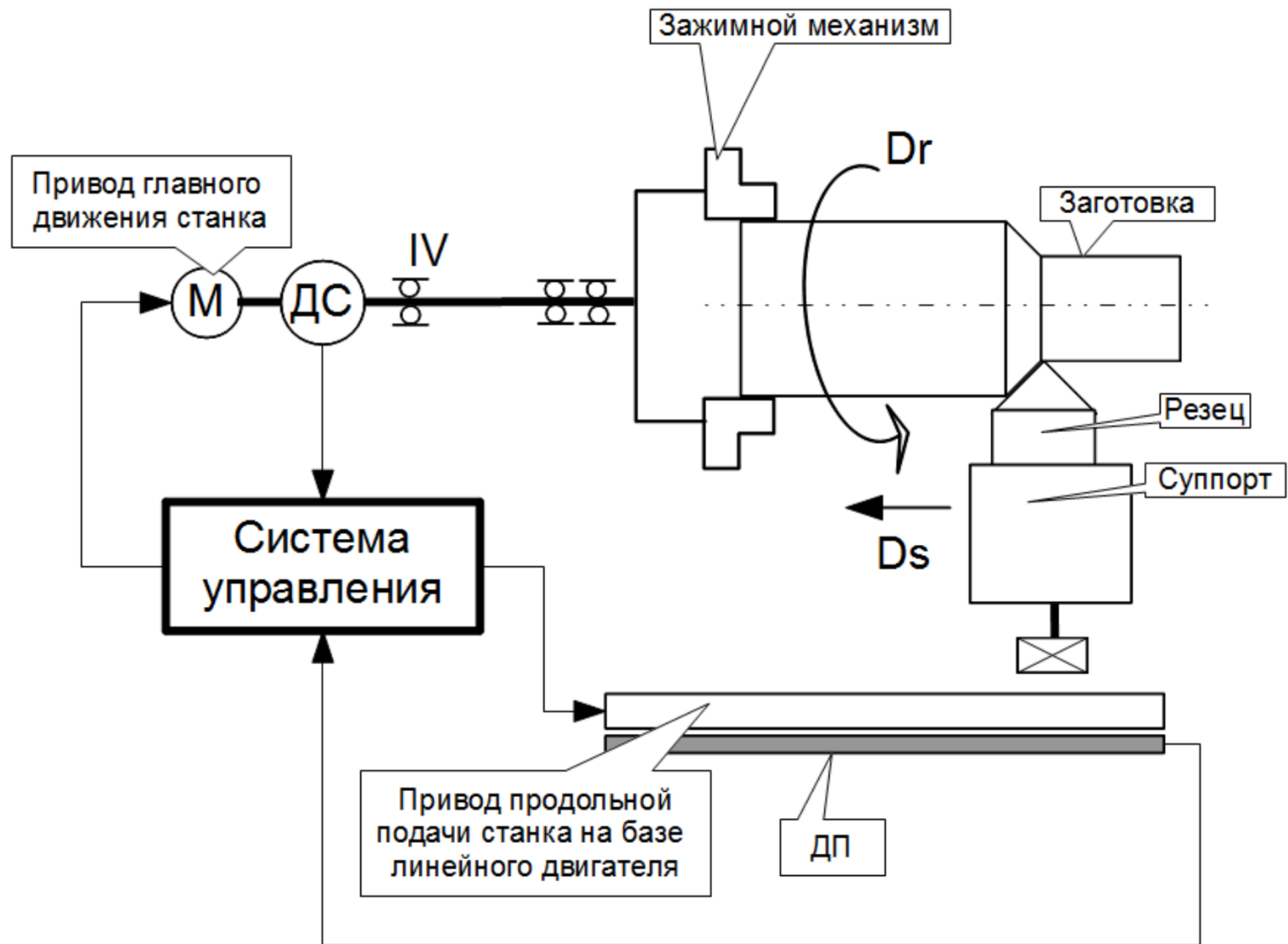
а)



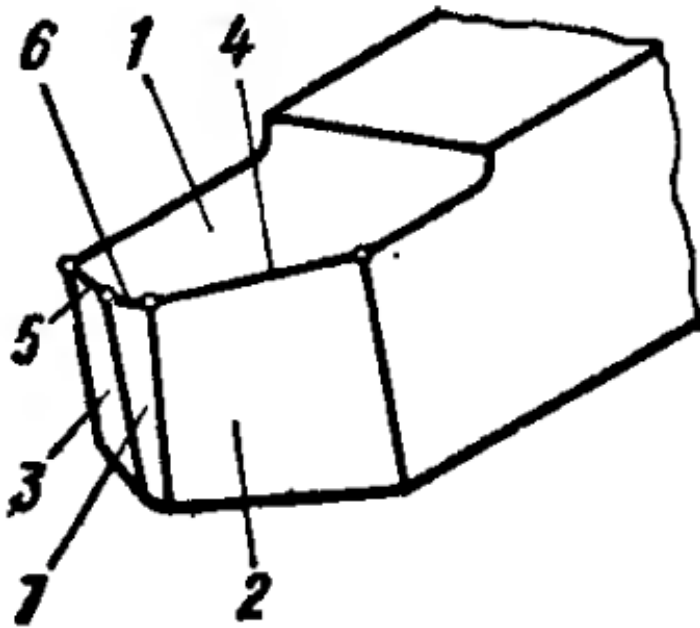
б)



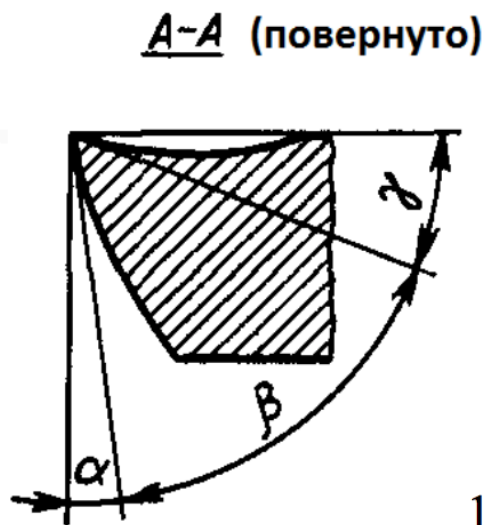
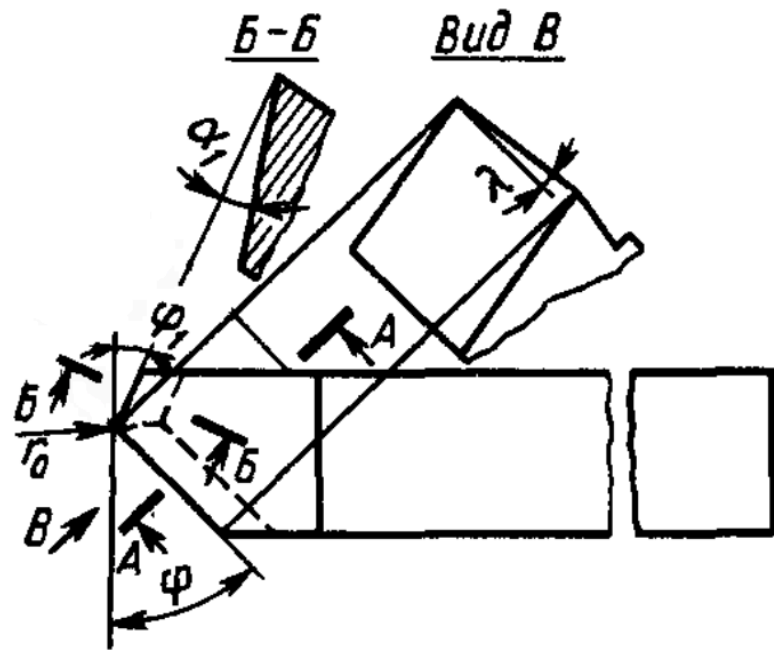




# Геометрические параметры режущего клина инструмента

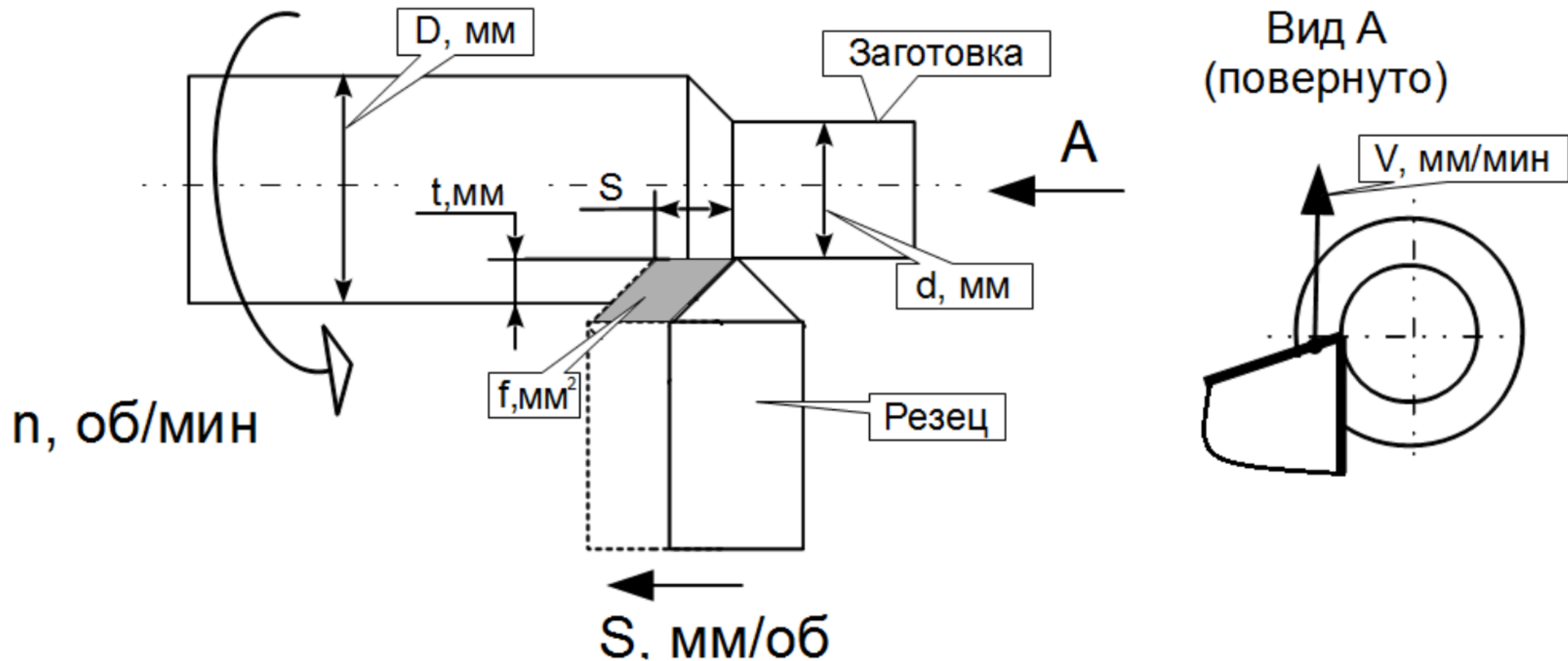


1. передняя поверхность;
2. задняя поверхность;
3. вспомогательная задняя поверхность;
4. главное лезвие;
5. вспомогательное лезвие;
6. переходное лезвие;
7. переходная задняя поверхность.



1.  $\varphi$  - главный угол в плане;
2.  $\varphi_1$  - вспомогательный угол в плане;
3.  $\alpha$  - главный задний угол;
4.  $\alpha_1$  - вспомогательный задний угол;
5.  $\gamma$  - передний угол;
6.  $\beta$  - угол заострения;
7.  $\lambda$  - угол наклона главной режущей кромки.

# Форма срезаемого слоя и понятие о базовых режимах резания





### Глубина резания для точения

$$t = \frac{D - d}{2}$$

где  $D$  - диаметр заготовки, мм;

$d$  - диаметр обработанной поверхности, мм.

### Площадь срезаемого слоя

$$f = t \cdot S$$

### Скорость резания

$$V = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{1000}$$

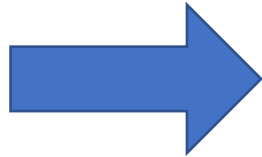
где  $n$  - число оборотов шпинделя, об/мин (мин<sup>-1</sup>).

# Понятие о силе резания

Основоположник науки о резании материалов



**Иван Августович Тимме**



Базовое выражение силы резания

$$P = q \cdot f = q \cdot t \cdot S$$

$q$  - коэф. удельного давления стружки на переднюю поверхность инструмента, Н/мм<sup>2</sup>

## Уточненное выражение силы резания

$$P = 10 C_p t^x S^y V^n K_p$$

- для многих случаев степень  $n = 0$  или имеет очень малое значение  $\Rightarrow V^n \approx 1$ ;
- $C_p = \text{const}, K_p = \text{const}$ .

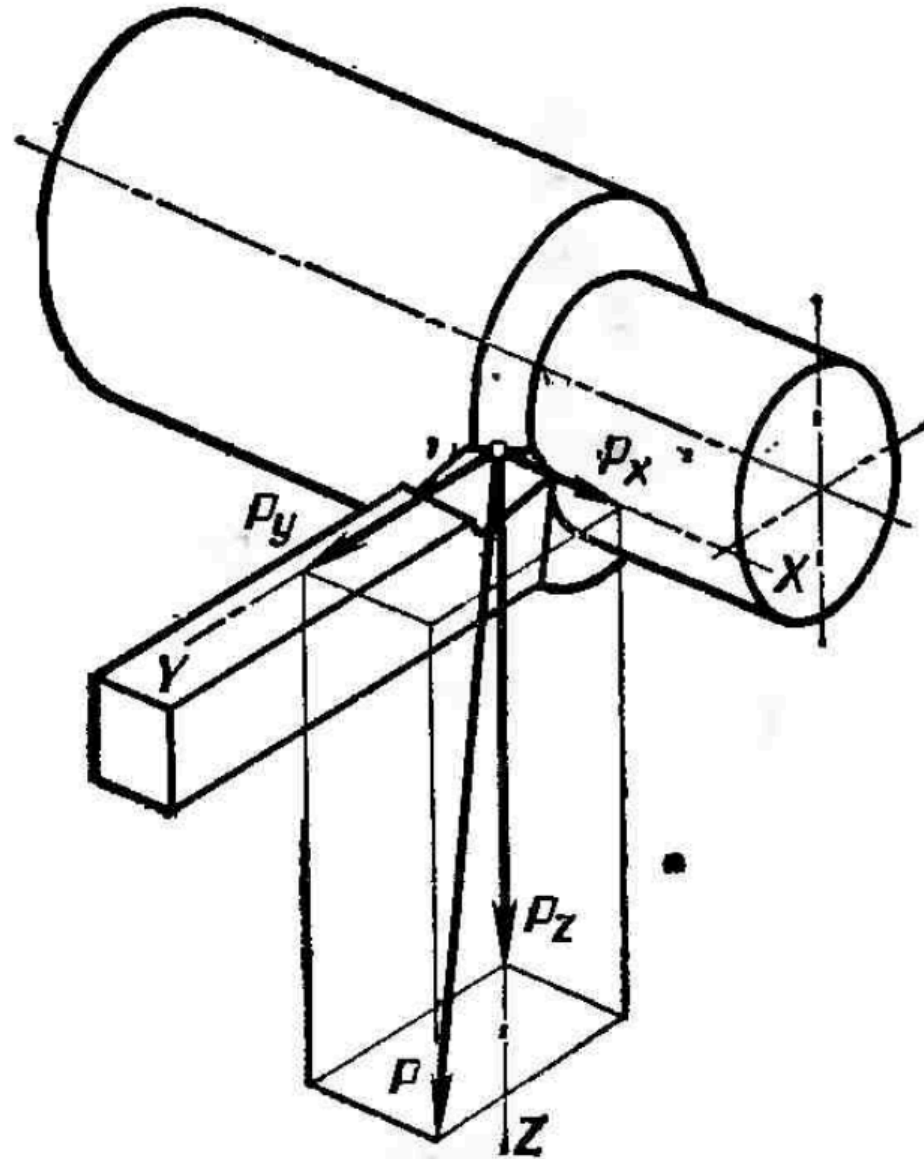
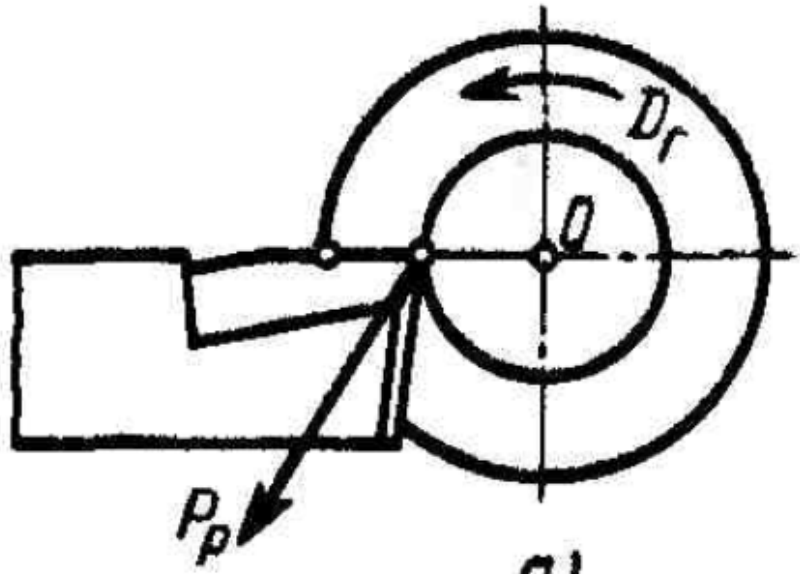


$$P = 10 \underbrace{C_p K_p}_{\varrho} t^x S^y$$



$$P = \varrho t^x S^y \approx \varrho \cdot t \cdot S$$

# Составляющие силы резания (для точения)

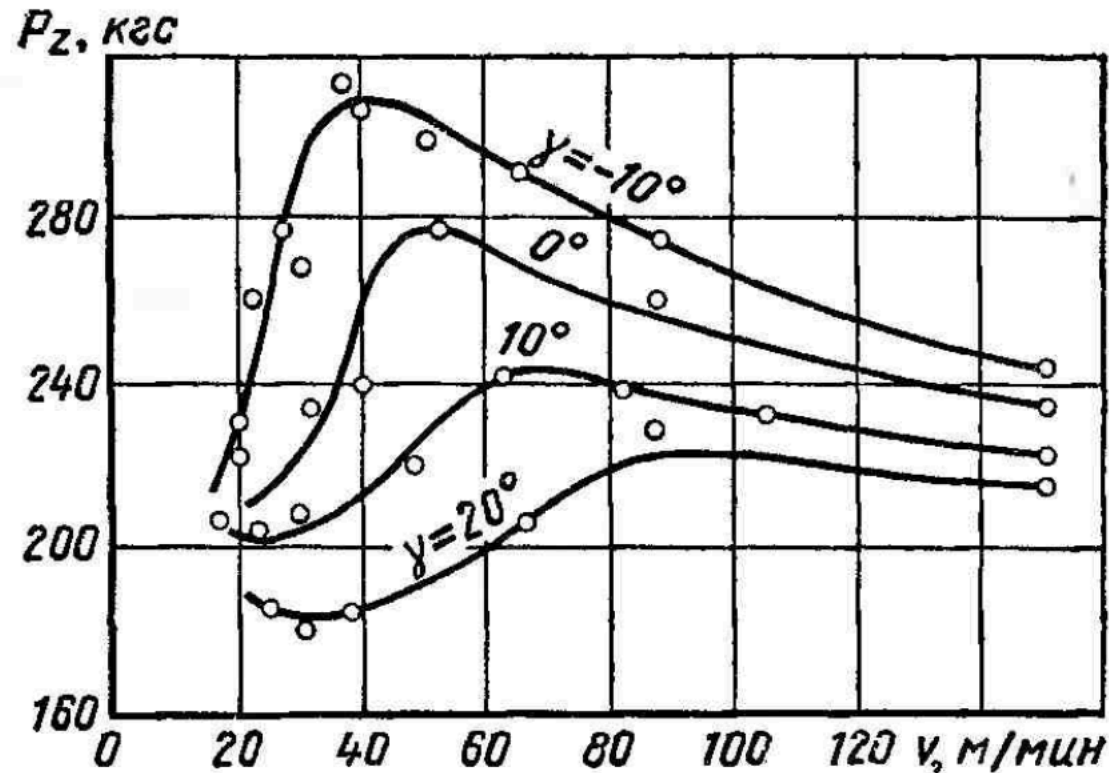


# Нелинейный и нестационарный характер силы резания

Нестационарность силы резания выражается

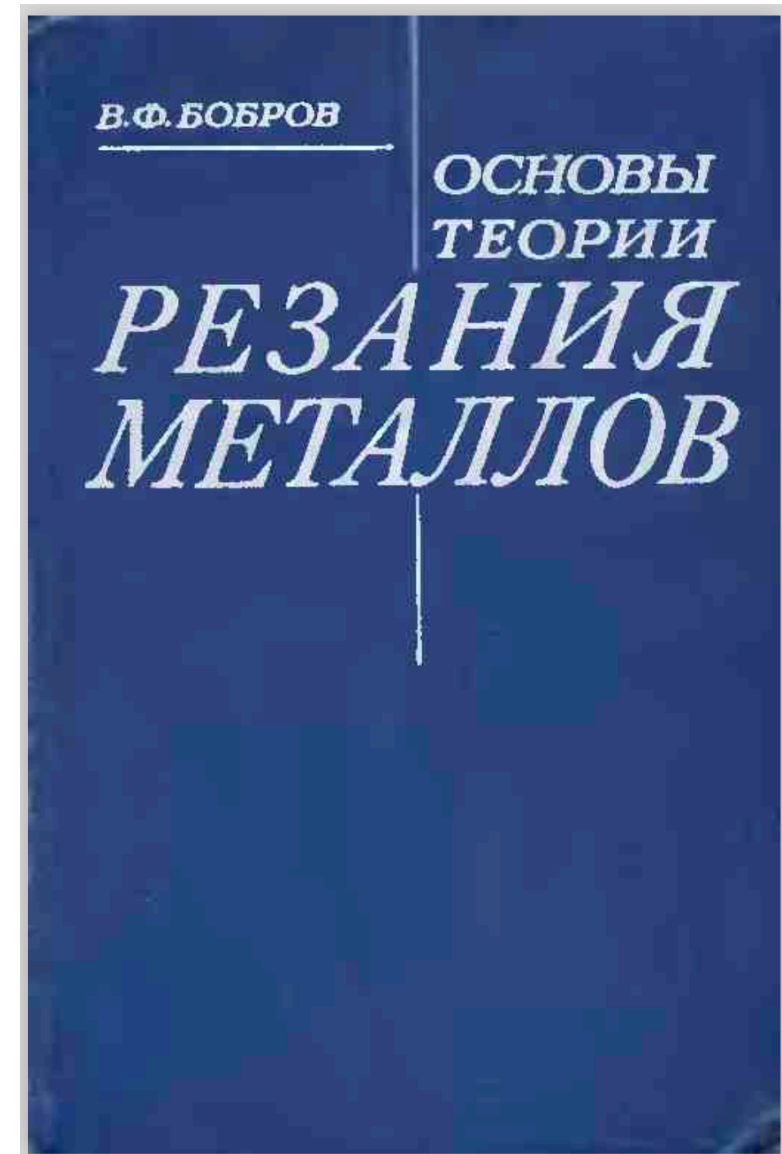
- может варьироваться угол расположения силы резания  $P$ ;
- соотношения между составляющими  $P_x$ ,  $P_y$  и  $P_z$  силы резания  $P$  непостоянны.

Нелинейность силы резания (пример для различных скоростей  $V$  и передних углов  $\gamma$ ):





# Дополнительная литература по темам лекции



## ЛЕКЦИЯ № 02

Тема:

«Классический и современный подход в анализе  
динамических свойств процессов резания.

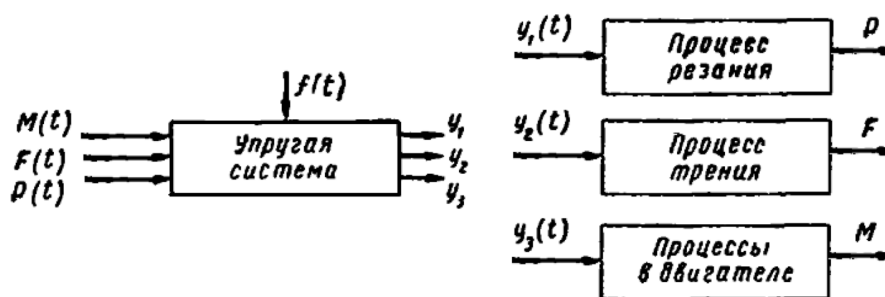
Математическое моделирование динамических процессов»

## Классический подход в анализе динамических свойств процессов резания

В классическом представлении анализ и синтез динамики технологических процессов механической обработки<sup>1 2</sup> основывается на следующих базовых положениях:

1. процессы, протекающие в технологической системе, рассматриваются как стационарные процессы:
  - (а) силы резания постоянные;
  - (б) процесс резания является невозмущенным (и другие процессы тоже);
2. система станок-приспособление-инструмент-деталь (СПИД) является абсолютно жесткой;
3. система СПИД, процесс резания, процессы трения, процессы в приводах исполнительных механизмов станка и т.п. рассматриваются независимо друг от друга в соответствующих дисциплинах.

Классический подход позволяет достаточно просто анализировать и проектировать технологические процессы, но в таком подходе не учитывается ряд существенных явлений и связей между ними, которые





## Современный (синергетический) подход в анализе динамических свойств процессов резания

В основе синергетического подхода анализа и синтеза динамики технологических процессов механической обработки лежат следующие основные положения:

1. процессы, протекающие в технологической системе, являются принципиально возмущенными;
2. система СПИД не является абсолютно жесткой;
3. система СПИД, процесс резания, процессы трения, процессы в приводах исполнительных механизмов станка и т.п. рассматриваются как зависимые, влияющие друг на друга.

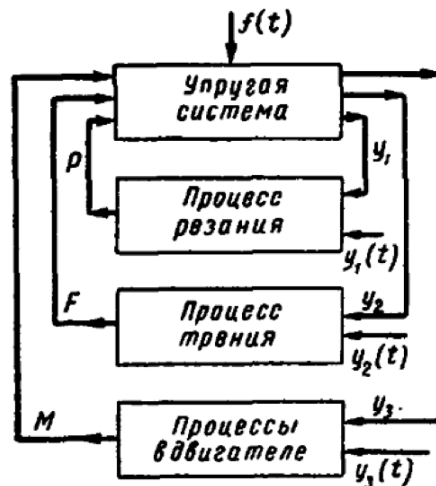
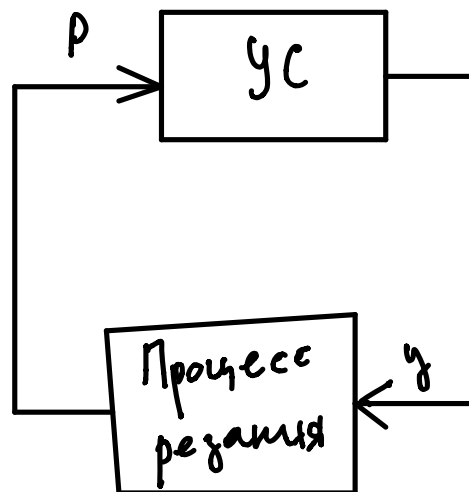


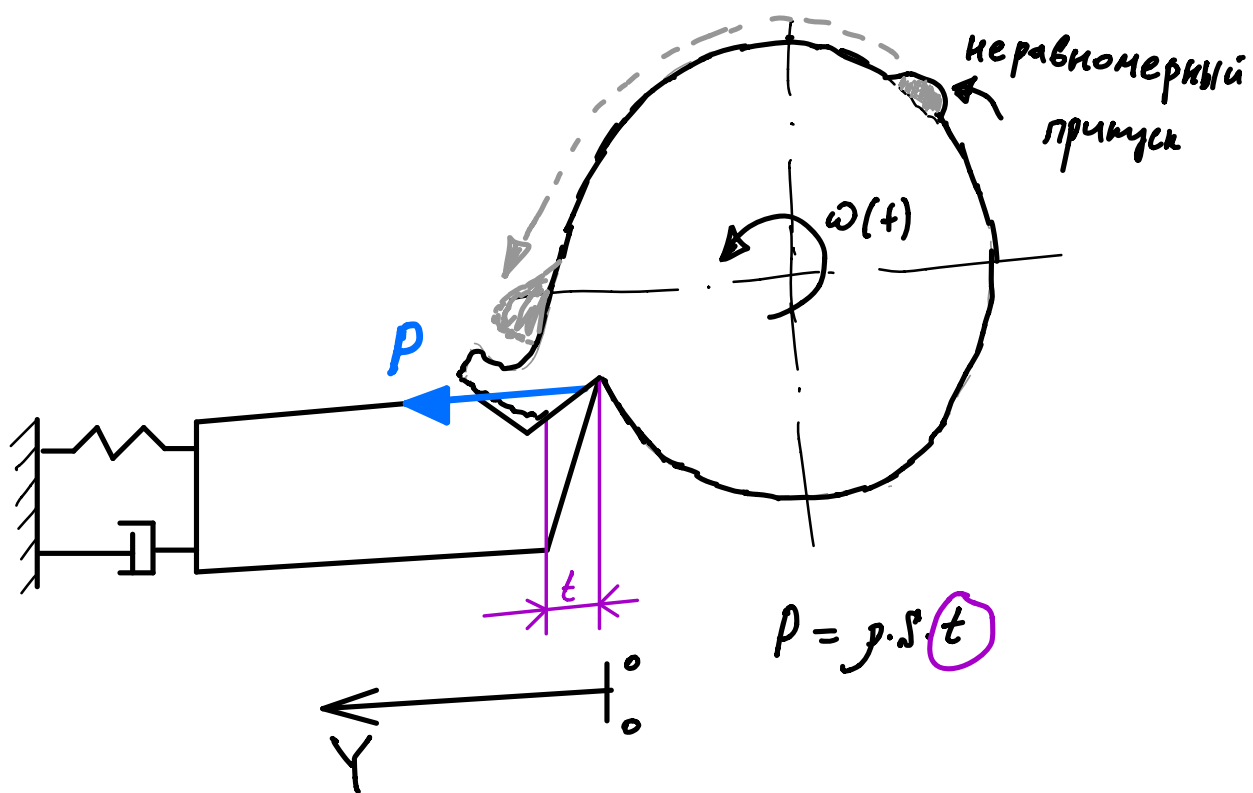
Рис. 0.1.2: Схема замкнутой динамической системы станка (синергетический подход) [2]:  $y_i(t)$  - управление, возмущение или управление и возмущение, зависимости от типа рабочего процесса и рассматриваемой задачи

**Определение.** Динамическая система станка – это совокупность упругой системы и рабочих процессов в их взаимодействии.

**Определение.** Упругая система (УС) включает в себя СПИД.

**Определение.** Рабочие процессы – это процессы резания, трения, процессы в двигателях (электромагнитные, аэро- или гидродинамические и др.)





Математическое моделирование динамических процессов  
технологических систем обработки металлов резанием

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

уравне

Лагранжа II-го  
рода

где:  $T$  - кинетическая энергия  
механ. системы;

$q_i$  -  $i$ -ая обобщённая координата;

$\dot{q}_i$  -  $i$ -ая обобщённая скорость;

$Q_i$  -  $i$ -ая обобщённая сила.

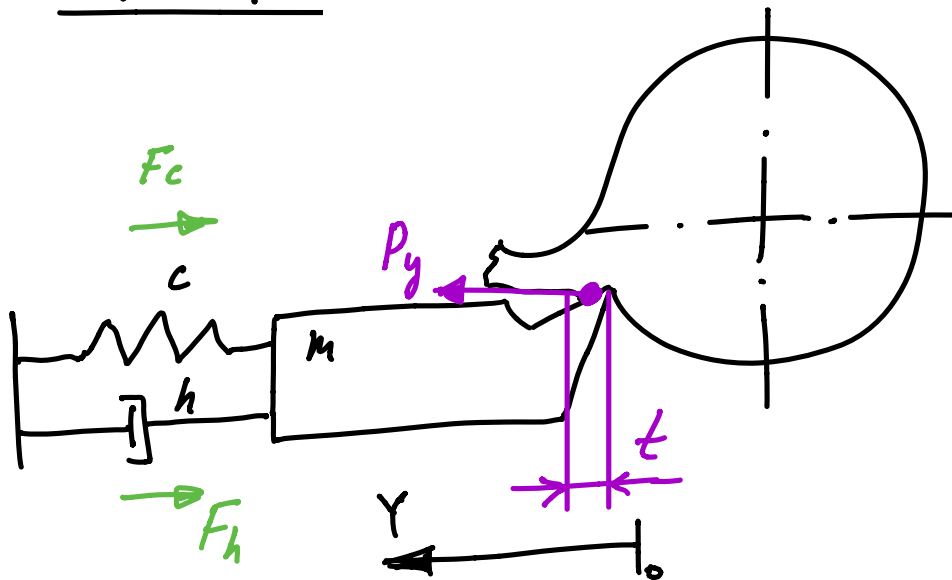
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L = T - \Pi$$

Справедл.  $p = p \cdot S \cdot t$

$$p = p \cdot S \cdot t \cdot V$$

Пример



$$T = \frac{1}{2} m V^2(t) \Big|_{V(t) = \dot{Y}(t) = \dot{q}(t)} = \frac{1}{2} m (\dot{Y}(t))^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} = m \dot{Y}(t) ; \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} = \frac{d}{dt} [m \dot{Y}(t)] \Big|_{\substack{m = \text{const} \\ \dot{Y}(t) = \frac{dY(t)}{dt}}} = m \frac{d}{dt} \left[ \frac{dY(t)}{dt} \right] =$$

$$= m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = m \ddot{Y}(t)$$

$m$  - упругая масса

$$Q_Y(t) = \frac{\left( \sum_i \delta A_i \right) \delta Y}{\delta Y} = \frac{(P_Y - F_h - F_c) \cancel{\delta Y}}{\cancel{\delta Y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_Y(t) = P_Y - F_h - F_c$$

$$F_h = \begin{cases} h \cdot V, & V \leq V_0 \\ h \cdot V^2, & V > V_0 \end{cases} \Rightarrow F_h = h \cdot V(t)$$

или

$$F_h(t) = h \cdot \dot{Y}(t)$$

$$F_c = c \cdot Y(t)$$

$h$  - коэф. диссипации  
подсистемы инстр.

$c$  - коэф. жёсткости  
подсистемы инстр.

$$P_Y = \underbrace{p \cdot l}_{p_Y} \cdot t = p_Y \cdot t$$

$$t = t_0 - Y(t)$$

где  $t_0$  — заданная технологическая глубина резания

$Y(t)$  — упругое деформационное смещение резца относительно заготовки.

Тогда:

$$P_Y = p_Y \cdot (t_0 - Y(t))$$



Динамическая характеристика процесса резания

Собираем все элементы уравнения

Лагранжа

$$m \ddot{Y}(t) = p_Y \cdot (t_0 - Y(t)) - h \cdot \dot{Y}(t) - c \cdot Y(t)$$

$$m \ddot{Y}(t) + h \dot{Y}(t) + c Y(t) = p_Y (t_0 - Y(t))$$

Упругая система  
связка

процесс  
резания

ММ технолог.  
системы.

Физические размерности параметров ММ

$$t_0, Y(t) \text{ [мм]}$$

$$\dot{Y}(t) \text{ [мм/с]}$$

$$\ddot{Y}(t) \text{ [мм/с}^2\text{]}$$

$$p_Y \text{ [кН]}$$



Приведенная масса

$$F = m \vec{a} \Rightarrow m = \frac{F}{\vec{a}} = \frac{k_2}{\left(\frac{m_1}{c^2}\right)} = \frac{k_2 \cdot c^2}{m_1}$$

$$m \left[ \frac{k_2 \cdot c^2}{m_1} \right]$$

Кэф. диссипации

$$F = h \cdot V \Rightarrow h = \frac{F}{V} = \frac{k_2}{\left(\frac{m_1}{c}\right)} = \frac{k_2 \cdot c}{m_1}$$

$$h \left[ \frac{k_2 \cdot c}{m_1} \right]$$

Кэф. неустойчивости

$$F = c \cdot X \Rightarrow c = \frac{F}{X} = \frac{k_2}{m_1}$$

$$c \left[ \frac{k_2}{m_1} \right]$$

Коэф.  $\mathcal{P}_Y$

$$P_Y = \mathcal{P}_Y \cdot t \Rightarrow \mathcal{P}_Y = \frac{P_Y}{t} = \frac{\text{кз}}{\text{мм}}$$

$\mathcal{P}_Y \quad \frac{\text{кз}}{\text{мм}}$  — жёсткость  
процесса  
резания

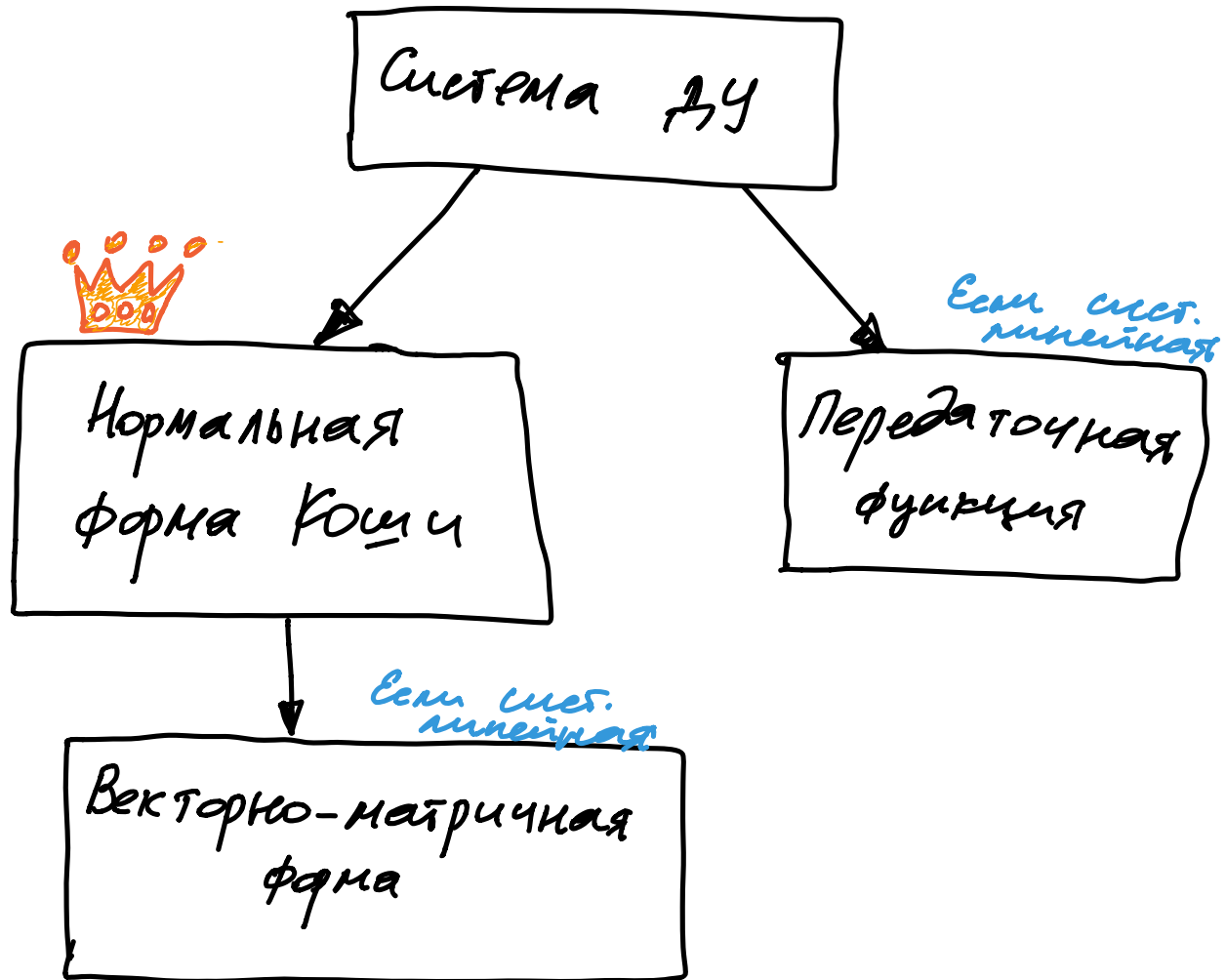
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА



## ЛЕКЦИЯ № 03

**«Формы линейных математических моделей технологических систем.  
Методы анализа динамики линейных технологических систем»**

# Основные формы математических моделей динамики технологических систем



Норм. форма Коши является универсальной формой представления математических моделей динамических систем, в том числе и технических систем процессов разрыва.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = k \cdot u(t) \quad - \text{ЛДУ } n\text{-го порядка}$$

⇓

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = f_1(y, t, \dots) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = f_2(y, t, \dots) \\ \vdots \\ \frac{dy_n(t)}{dt} = f_n(y, t, \dots) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- нормальная} \\ \text{форма Коши.} \end{array}$$

Типовой порядок анализа линейных математических моделей  
динамики технологических систем резания

- 1) Переход от ММ, заданной в  
полных координатах к ММ, запи-  
санной в вариациях относительно  
но стационарной траектории.
- 2) Запись ММ линейной технологичес-  
кой системы в нормальной форме  
Колли (для кратких случаев можно  
в виде ПФ).
- 3) Переход от норм. ф. Колли к  
векторно-матричной форме.
- 4) Анализ устойчивости технологической  
системы, при изменении каких-либо  
параметров.

## Анализаторные виды исследований

- 5) Исследование формы обработанной поверхности в зависимости от динамических свойств системы.
- 6) Исследование частотных св-ств системы
- 7) Исследование влияния динамики резания на динамику электропривода.
- 
- 
- 
-



Запись математической модели динамики технологической системы в вариациях относительно стационарной точки

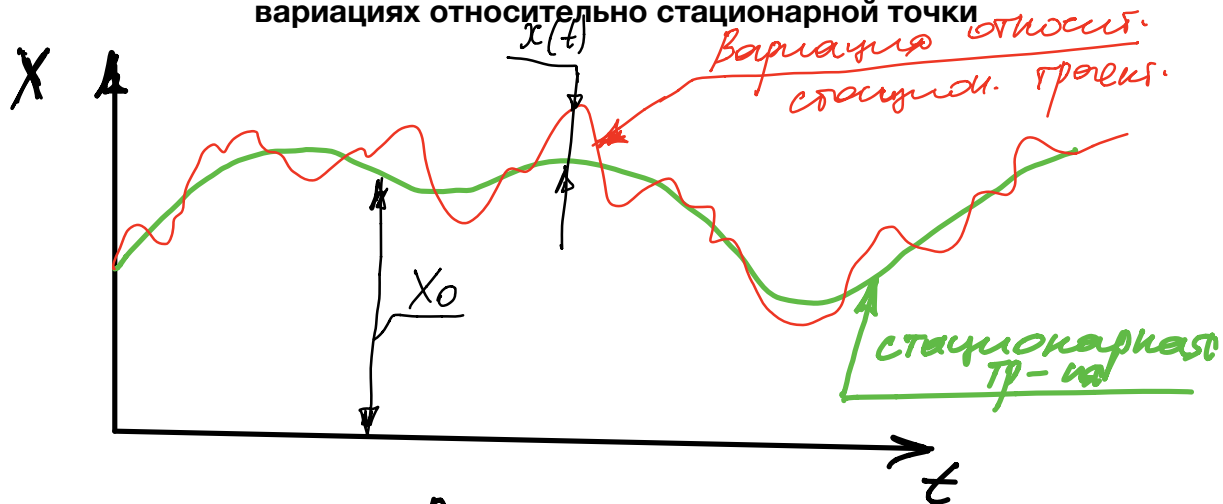


Рис. 1. Общая траектория

$$X(t) = X_0 + x(t)$$

где:  $X(t)$  — полная координата;

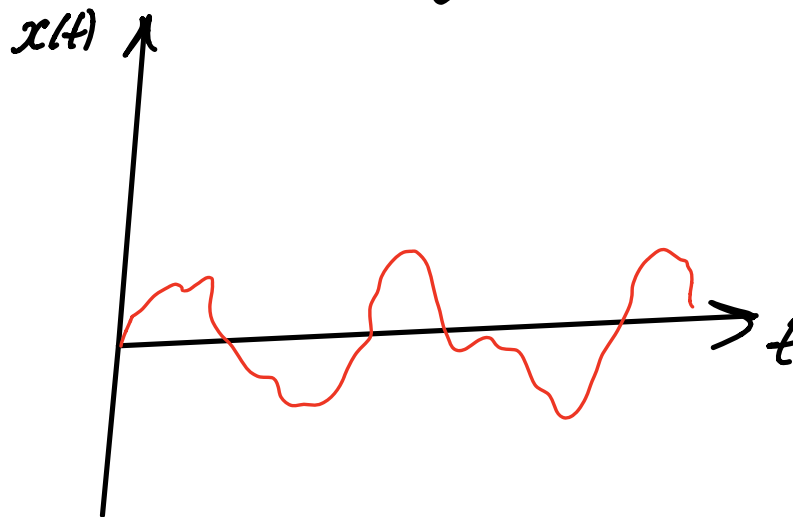
$X_0$  — стационарная составляющая движения;

$x(t)$  — вариация относительно стационарной составляющей;

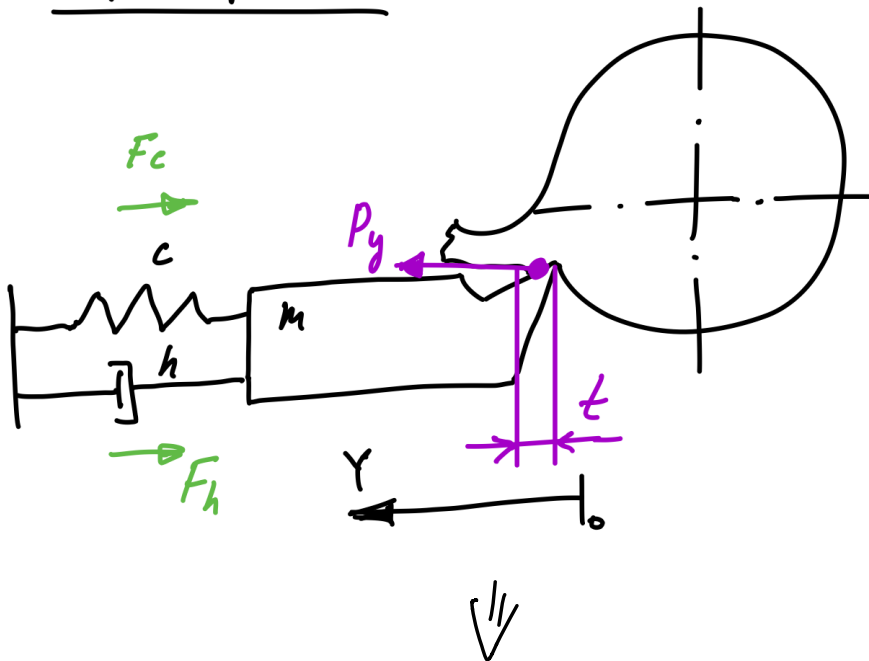
Для задач анализа динамики технологических систем, интерес представляет рассмотрение движения системы в вариациях относительно стационарной траектории.

Чтобы получить движение в вариациях относительно стационарной траектории, необходимо

$$x(t) = X(t) - X_0$$



# Пример 1:




$$m \ddot{y}(t) + h \dot{y}(t) + c \cdot y(t) = p_y(t_0 - y(t))$$

упругая система станка
процесс резания

$$m \cdot \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + h \frac{dY(t)}{dt} + c \cdot Y(t) = p_Y \cdot t_0 - p_r \cdot y(t)$$

$$Y(t) = Y_0 + y(t) \quad (2)$$


  
 Полная координата  $Y_0$  — координата стационар. гр-ны  $y(t)$  — вариация относит. стационар. гр-ны

$$\frac{d^n Y(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n} [Y_0 + y(t)] = \frac{d^n Y_0}{dt^n} + \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

т.к.  $Y_0 = \text{const}$  — стационар. гр-на

$$\frac{d^n Y_0}{dt^n} = 0$$

⇓

$$\boxed{\frac{d^n Y(t)}{dt^n} = \frac{d^n y(t)}{dt^n}} \quad (3)$$

подставим (2) и (3)  $\rightarrow$  (1)

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot (Y_0 + y(t)) = p_Y t_0 - p_Y y(t)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot Y_0 + c \cdot y(t) = p_Y t_0 - p_Y y(t) \quad (4)$$

Получаем ур-ие стационарной тр-цы системы:

$$y(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^n y(t)}{dt^n} = 0$$

$$c \cdot Y_0 = p_Y t_0 \quad (5)$$

$$Y_0 = \frac{p_Y t_0}{c}$$

Вычисление стационарной коорд.

Выведем (5) из (4):

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y_0 + c \cdot y(t) = p_Y t_0 - p_Y y(t)$$

$$0 + 0 + c \cdot y_0 + 0 = p_Y t_0 + 0$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h \frac{dy(t)}{dt} + 0 + c \cdot y(t) = 0 - p_Y y(t)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y(t) = -p_Y y(t)$$

ММ динамики процесса течения,  
записанная в вариациях относительно  
стационарной траектории.

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h \frac{dy(t)}{dt} + (c + p_Y) \cdot y(t) = 0$$

Запишем последние  $\Delta y$   
в нормальной форме  
Коши

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = v(t) \\ m \frac{dv(t)}{dt} + h \cdot v(t) + (c + p_y) y(t) = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left[ \frac{dy(t)}{dt} \right]}_{v(t)} = \frac{dv(t)}{dt}$$

Корм. ф. Коши.

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m} \left[ -h v(t) - (c + p_y) \cdot y(t) \right] \end{cases}$$

Преобразует ММ в норм. ф. канон.  
и векторно-матричной форме

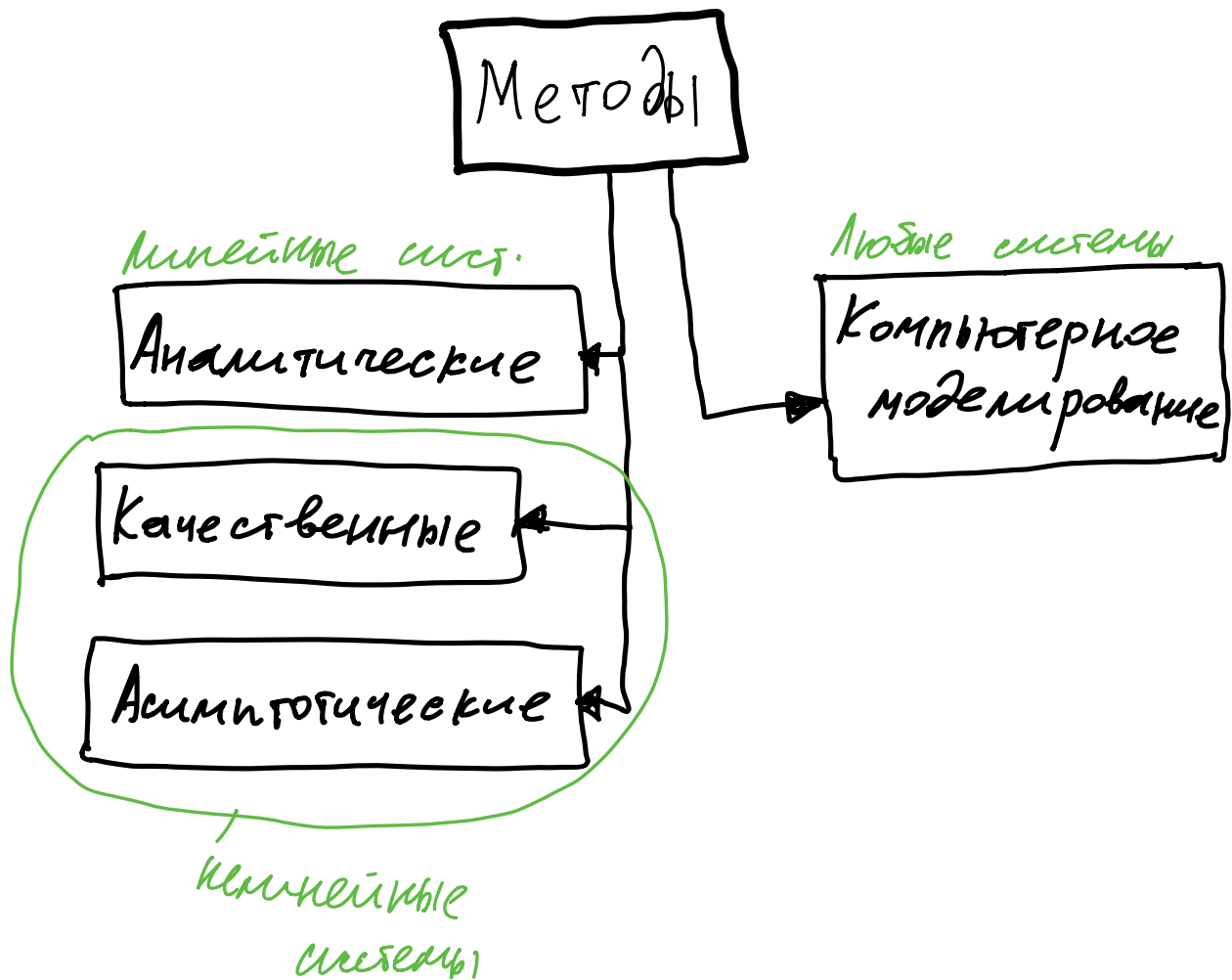
$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = 0 \cdot y(t) + v(t) \\ \dot{v}(t) = -\left(\frac{c+py}{m}\right)y(t) - \frac{h}{m}v(t) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} & \downarrow & & & \\ & y & & v & \\ \begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{c+py}{m}\right) & -\frac{h}{m} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- векторно-матричная форма



## Методы исследования динамических ММ технологических систем



Анализ устойчивости  
технологической системы  
при варьировании её параметров



Анализ устойчивости частотным

аналитическим решением

+

компьютерным моделированием

- 1) Получить характеристическое уравнение технической системы
- 2) выделить в коэффициентах хар-ого уравнения изменяемые параметры
- 3) задать сетку значений изменяемых параметров
- 4) Вычислить значения корней хар-ого уравнения в каждой точке сетки

5) Выполнить анализ корней  
и сделать вывод об устойчи-  
вости системы при конкрет-  
ных значениях изменяемых  
параметров

6) Записать полученный результат  
(какости на график)

7) Взять следующую точку на сетке  
и повторить пункты 4)... 7)

Пункты 1) и 2) — выполняются аналити-  
ческими методами

Пункты 3)... 7) — компьютерным методом

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{c + p_4}{m}\right) & -\frac{h}{m} \end{pmatrix}$$

Получим характеристическое  
уравнение системы

$$\det(\lambda \cdot I - A) = 0$$

где  $I$  — единичная матрица, с  
размерностью равной размер-  
ности матрицы  $A$ .

$$A_{2 \times 2} \Rightarrow I_{2 \times 2}$$

$$\Downarrow$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \left( \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - A \right) =$$

$$= \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{c+p_r}{m}\right) & -\frac{h}{m} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\left(\frac{c+p_r}{m}\right) & -\frac{h}{m} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda \cdot \left( -\frac{h}{m} - 1 \right) - 1 \cdot \left( -\left( \frac{c+p_r}{m} \right) \right) =$$

$$= \frac{h}{m} \lambda + \lambda^2 + \frac{c+p_r}{m} =$$

$$= \lambda^2 + \frac{h}{m} \lambda + \frac{c+p_r}{m} = 0$$

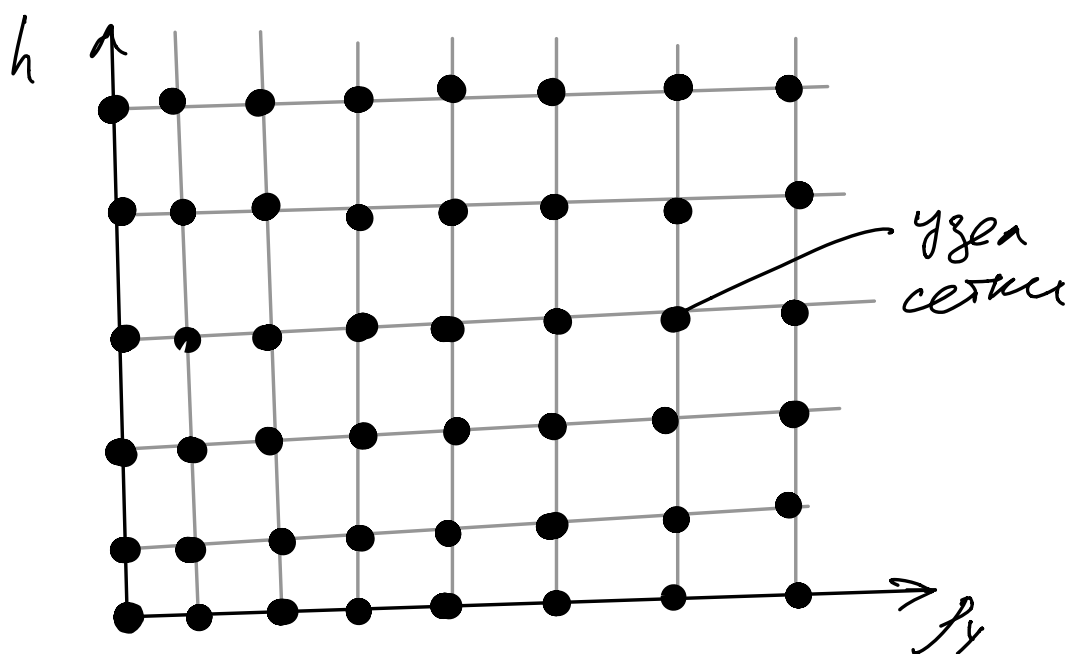
хар-ое урав



$$\underbrace{1}_{a_2} \cdot \lambda^2 + \underbrace{\frac{h}{m}}_{a_1} \lambda + \underbrace{\frac{c+p_r}{m}}_{a_0} = 0$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 \\ a_1 &= \frac{h}{m} \\ a_0 &= \frac{c+p_r}{m} \end{aligned}$$

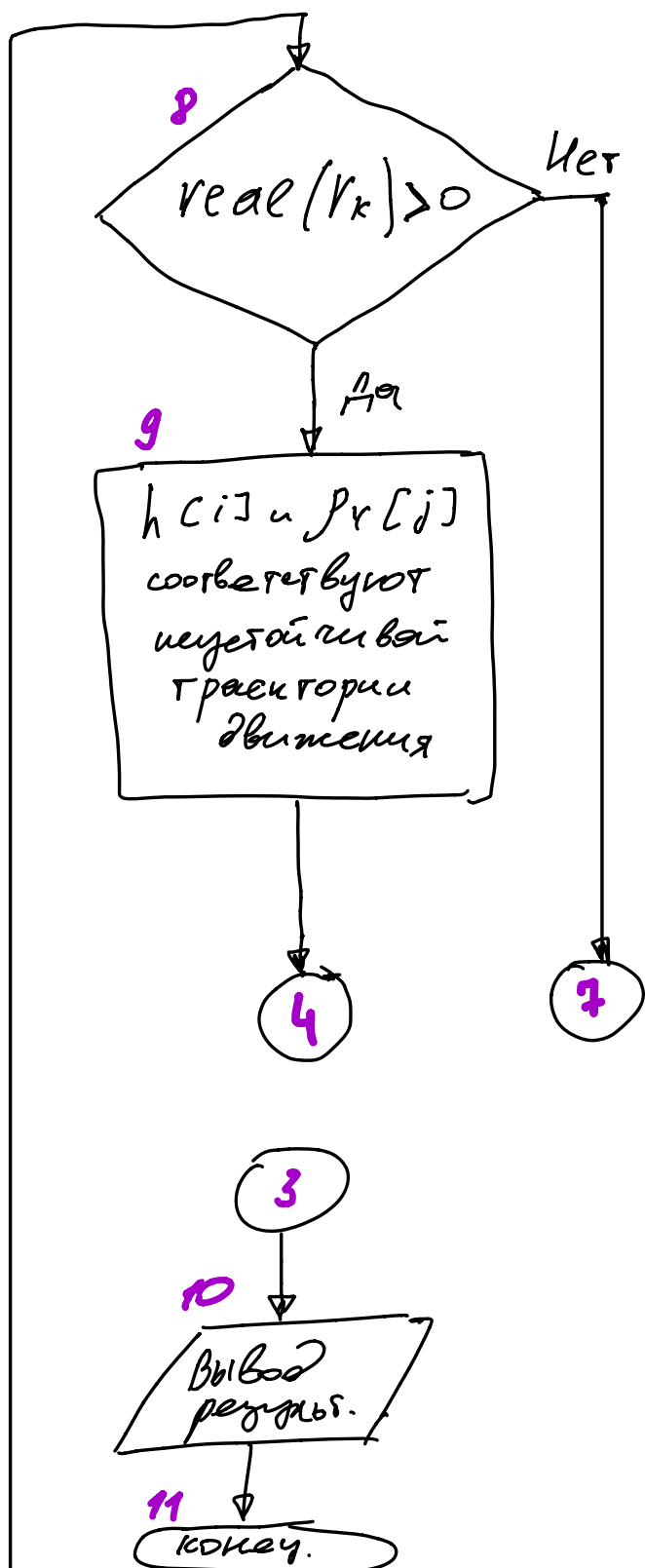
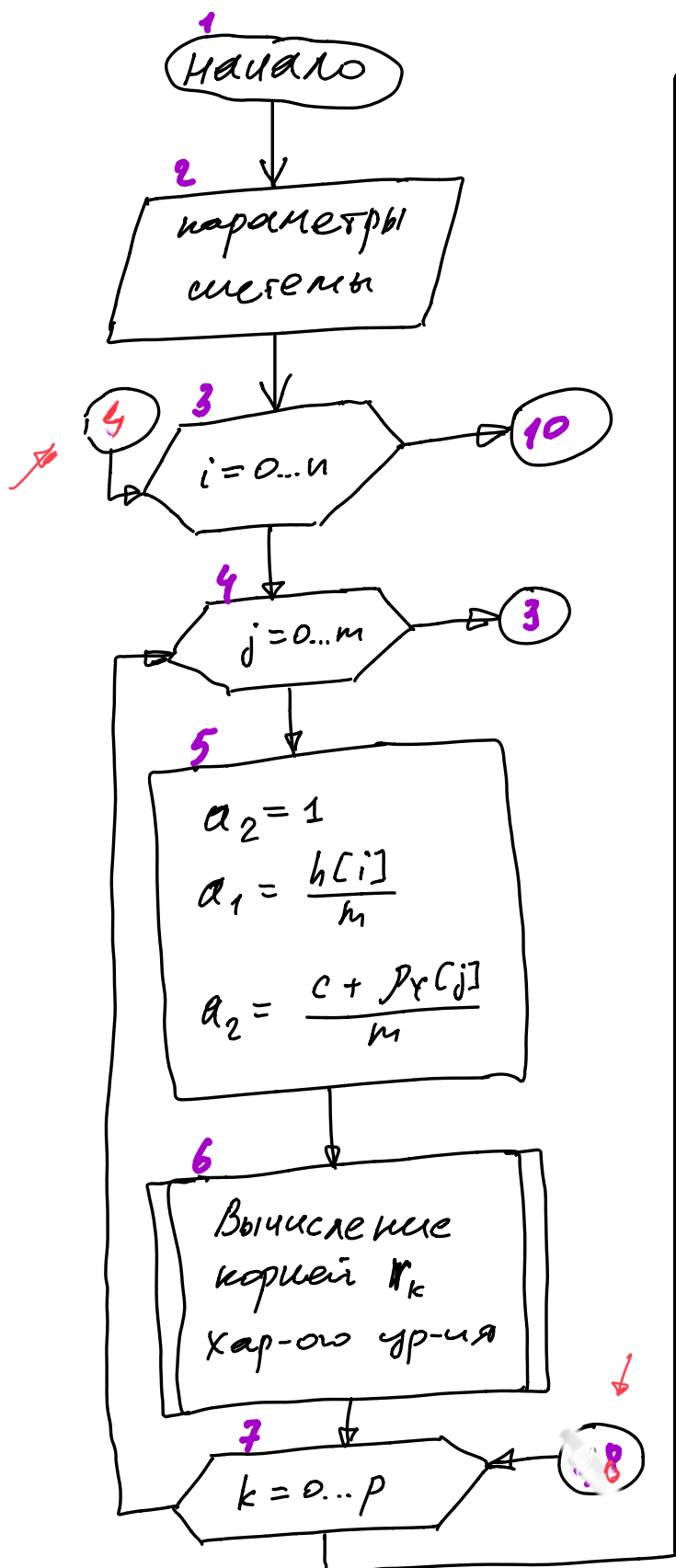
Пусть варьируемыми параметрами  
будут  $h$  и  $p_y$ , тогда задаётся  
сетка



Выполняет анализ устойчивости  
системы в каждом узле, по  
следующему алгоритму ↴



Алгоритм анализа целостности  
системы на сетке изменяющихся  
значений параметров, основанный  
на аналитическом решении и  
компьютерном моделировании



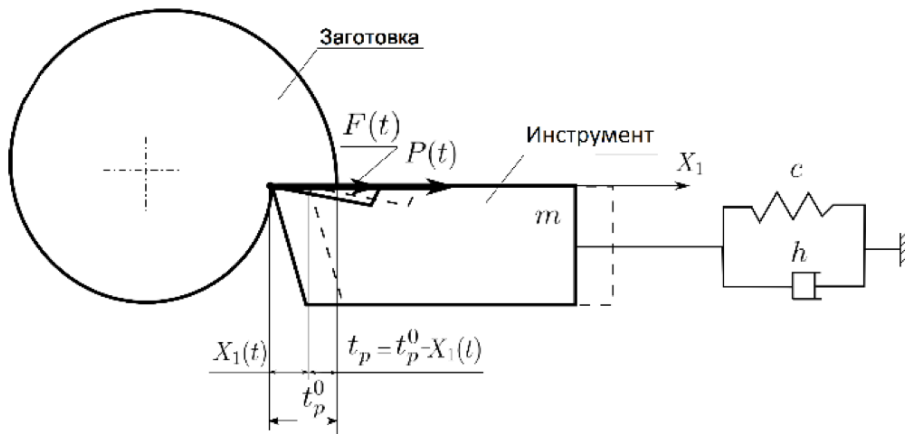


Рис. 1. Схема системы точения с одной степенью свободы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{c + \frac{P_0}{T_1} e^{-\frac{X_1^0}{T_1}}}{m}\right) & -\frac{h}{m} & \frac{\rho}{m} \\ -\frac{1}{T_2} & 0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix}$$

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (7)$$

где  $a_0 = mT_2$ ;  $a_1 = hT_2 + m$ ;

$$a_2 = \left[ c + \frac{P_0}{T_1} e^{-\frac{X_1^0}{T_1}} \right] T_2 + h;$$

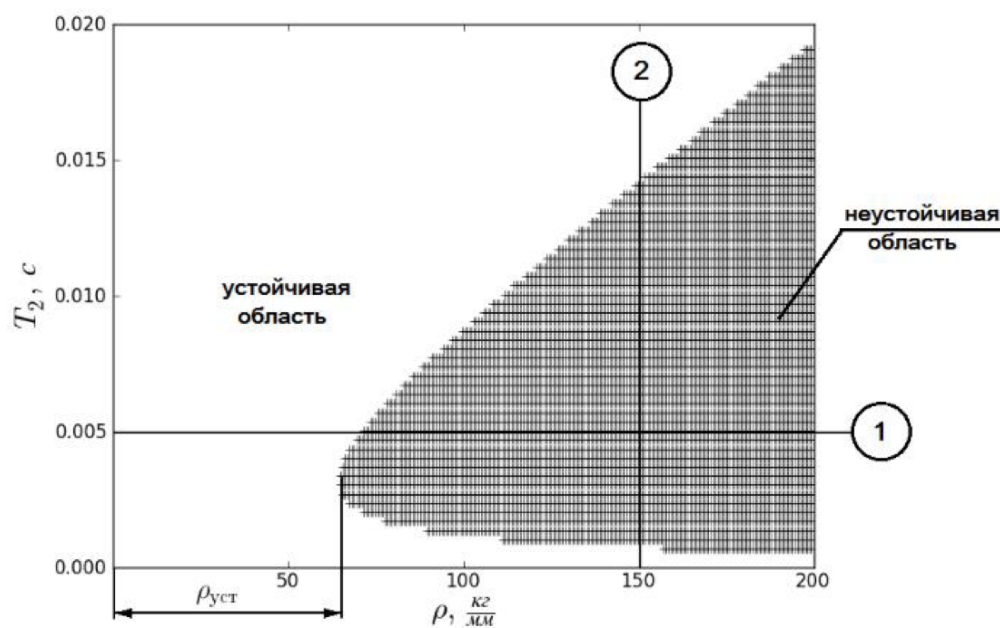
$a_3 = \rho + c + \frac{P_0}{T_1} e^{-\frac{X_1^0}{T_1}}$  – коэффициенты характеристического уравнения.

$$\rho(\omega) = -\left(c + \frac{P_0}{T_1} e^{-\frac{X_1^0}{T_1}}\right) +$$

$$+ \omega^2 \left( m - \left( \frac{1}{c + \frac{P_0}{T_1} e^{-\frac{X_1^0}{T_1}} - \omega^2 m} \right) \right) \quad (8)$$

где  $\omega$  – частота,  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ .

$$(c + \rho)X_1^0 = \rho t_p^0 + P_0 e^{-\frac{X_1^0}{T_1}} \quad (9)$$

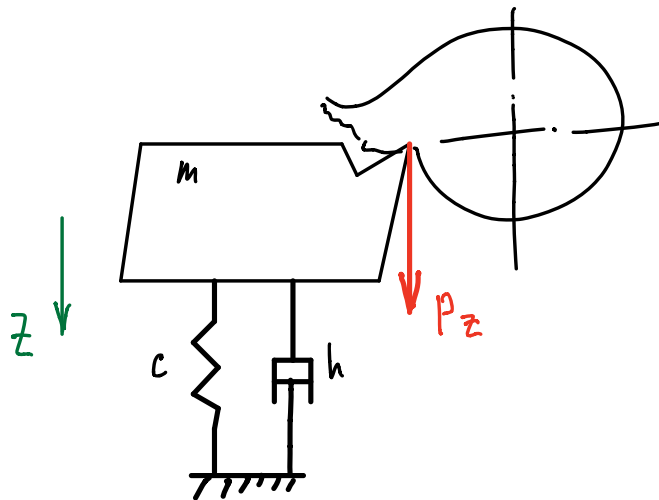
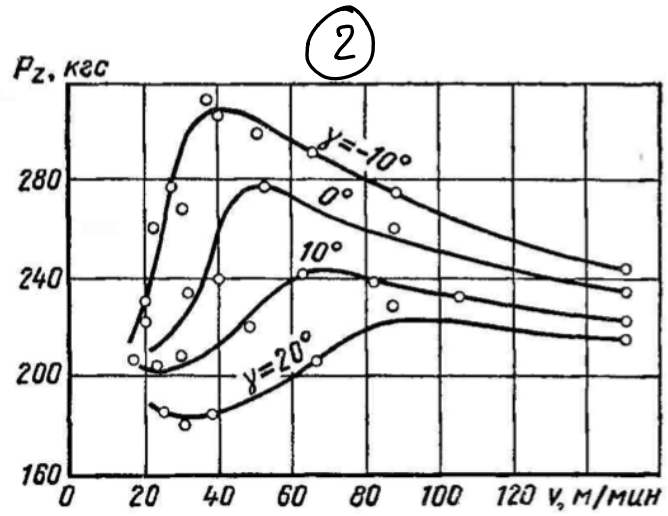
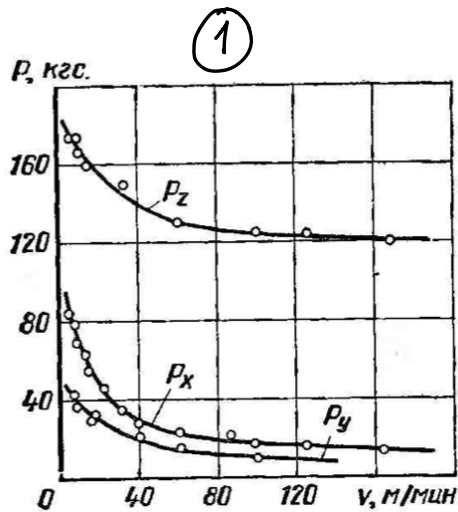


## **ЛЕКЦИЯ № 04**

### **Нелинейности в технологических системах резания**

# ТИПОВЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ, НАБЛЮДАЕМЫЕ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РЕЗАНИЯ

## 1) Нелинейный характер силы резания



$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + h \frac{dz(t)}{dt} + c z(t) = P_z(v)$$

① и ②

$$P_z(V) = a_n V^n + a_{n-1} V^{n-1} + \dots + a_1 V + a_0$$

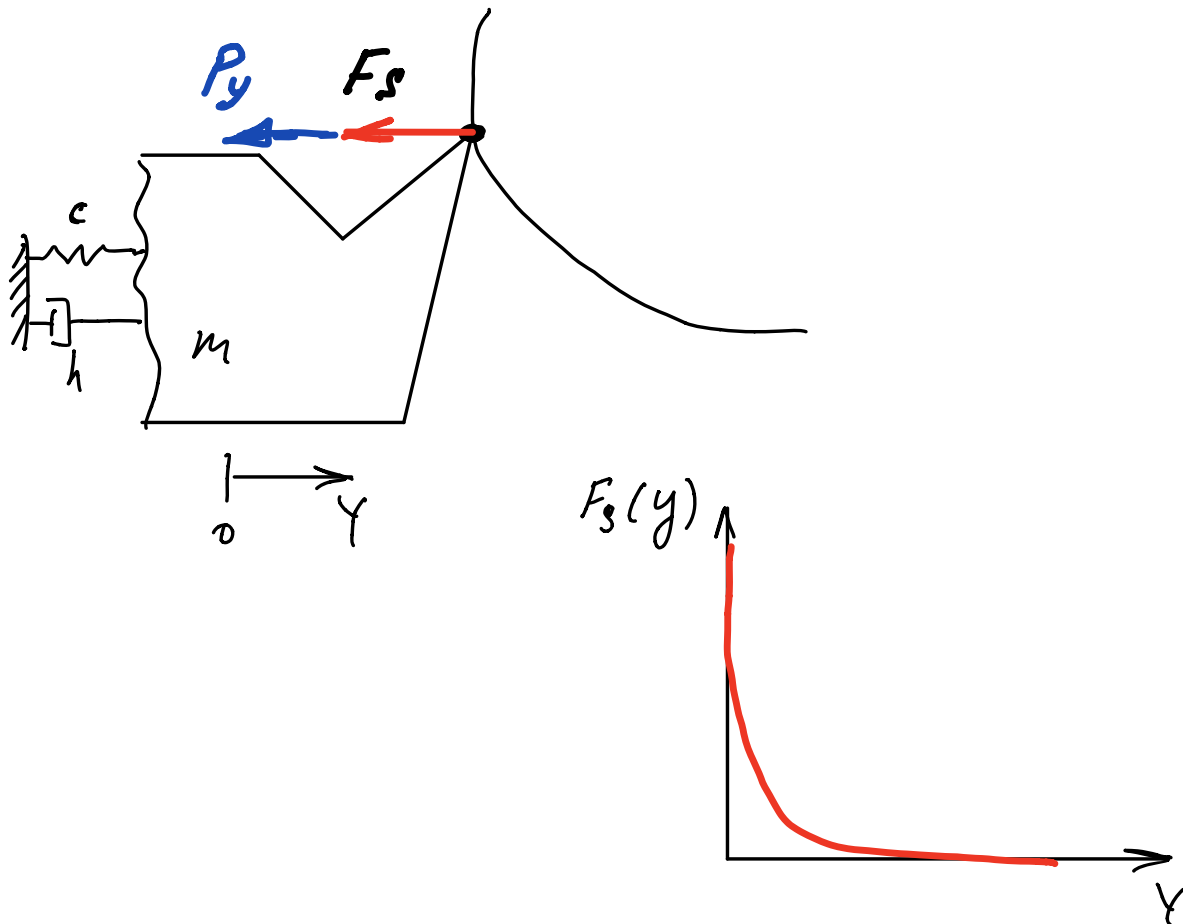
где  $V = \frac{dz(t)}{dt}$

$a_i$  — требуется определить (МНК)

② 
$$P_z(V) = \xi \cdot e^{-\beta \cdot V(t)}$$

$\xi, \beta$  — требуется определить (МНК)

2) Сила контактного взаимодействия задней поверхности инструмента и обработанной поверхности заготовки



$$m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + h \frac{dY(t)}{dt} + c Y(t) = P_y + F_s$$

$$P_y = p \cdot (t_0 - y)$$

$$F_s = \alpha \cdot e^{-\beta \cdot y}$$

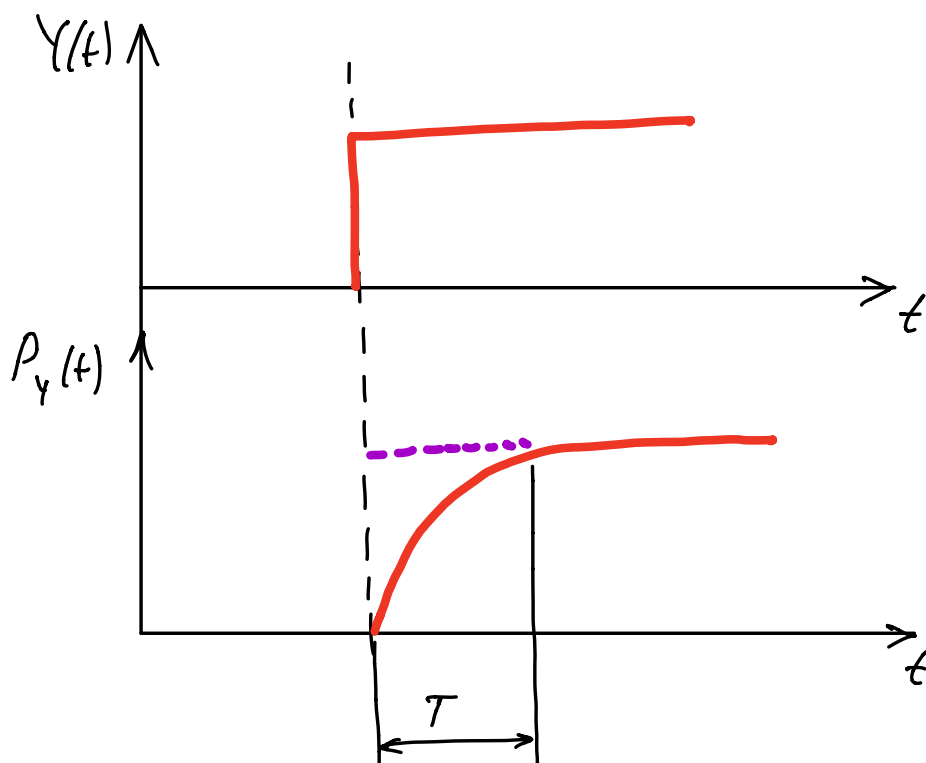
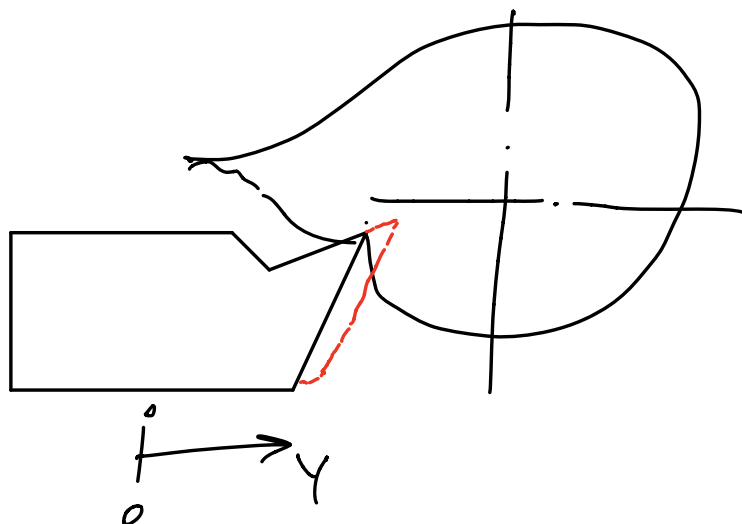


$$m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + h \frac{dY(t)}{dt} + c Y(t) = p t_0 - p y + 2e^{-\tau y}$$

|| в вакууме

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h \frac{dy(t)}{dt} + c y(t) = -p \cdot y + \underbrace{2 \cdot e^{-\tau \cdot y}}_{\text{нелинейность}}$$

3) Задержка изменения силы резания при изменении координат состояния технологической системы

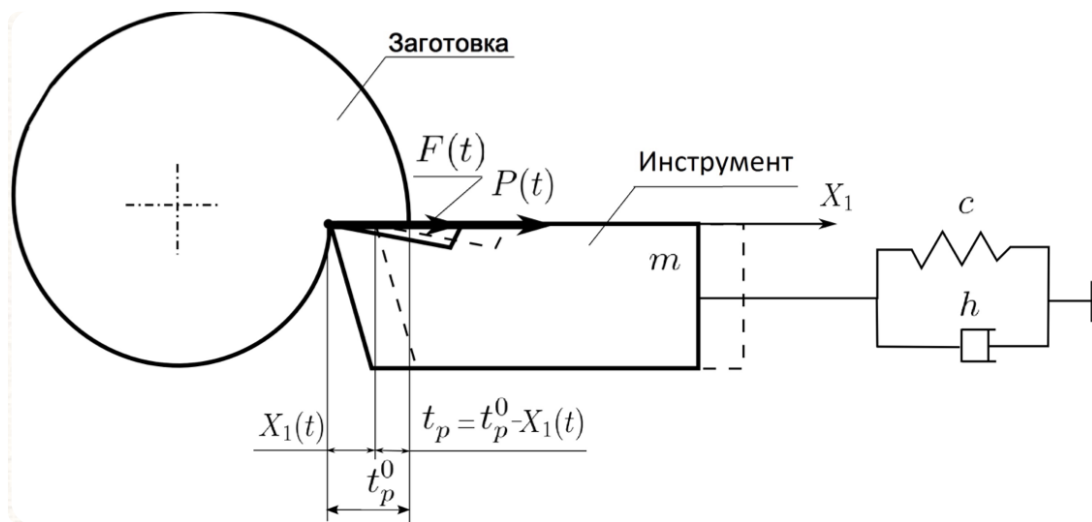


$T$  - время "динамической перестройки" системы

$$\begin{cases} m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + h \frac{dY(t)}{dt} + c Y(t) = p \cdot U(t) \\ T \frac{dU(t)}{dt} + U(t) = t_0 - y \end{cases}$$

( $t_0 - y(t)$ )

Пример ММ технологической  
системы резания, учитывающей  
инерционность (2) и (3)



$$P(t) = \rho (t_p^0 - X_1(t)) \quad - \text{ сила резания (радиальная)}$$

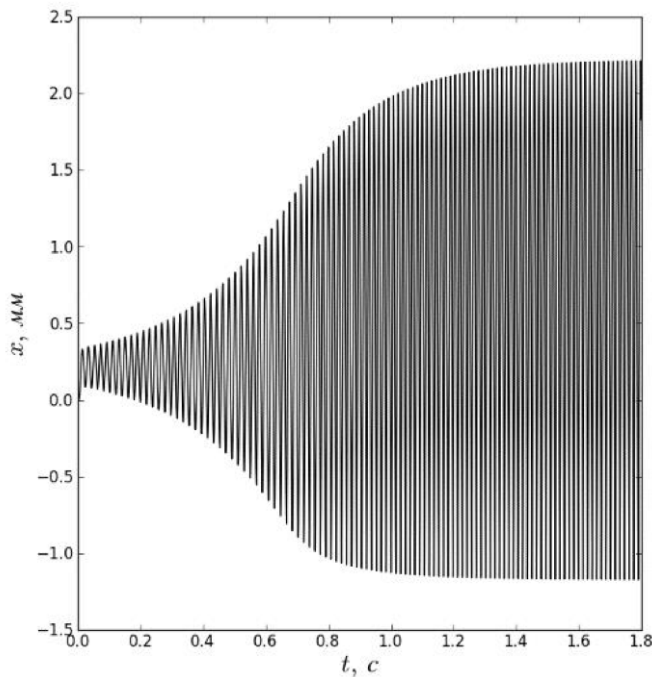
$$F(t) = P_0 e^{-\frac{X_1(t)}{T_1}} \quad - \text{ сила контактного взаимодействия}$$

## ММ технологической системы

$$\begin{cases} m \frac{d^2 X_1(t)}{dt^2} + h \frac{dX_1(t)}{dt} + cX_1(t) = \\ \quad = \rho U_1(t) + P_0 e^{-\frac{X_1(t)}{T_1}} \\ T_2 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = (t_p^0 - X_1(t)) \end{cases}$$

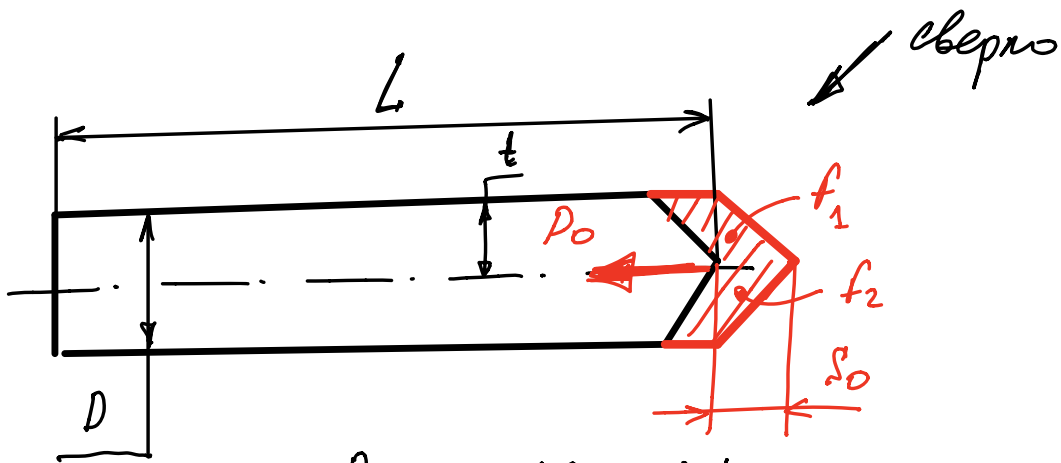
⇓

решение системы ДУ



← автоколебательный процесс

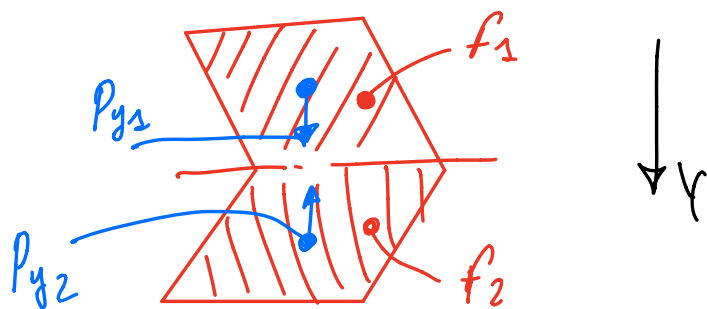
Пример ММ технологической  
системы, учитывающей  
упругие деформации инструмента  
и силу контактного взаимо-  
действия



$$P_0 = p \cdot (f_1 + f_2) \quad | \quad f_1 = f_2 = 2f_1 = f$$

$$f = t \cdot S_0$$

$$P_0 = p \cdot f = p \cdot t \cdot S_0$$



$$|p_{y1}| = p_y \cdot f_1$$

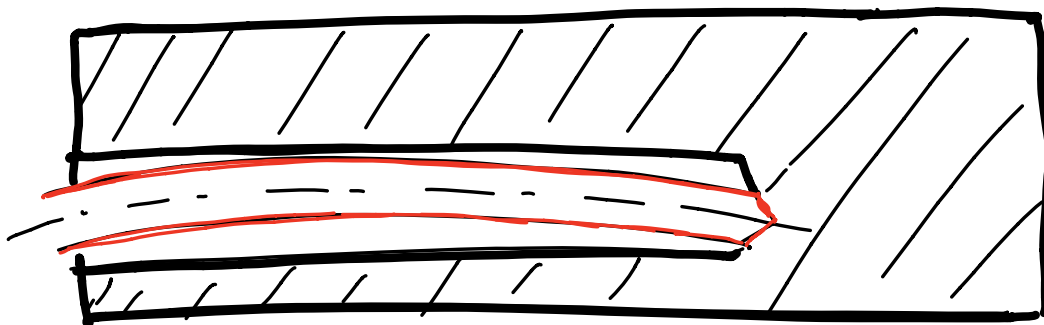
$$|p_{y2}| = p_y \cdot f_2$$

Т.к. в классической теории резания

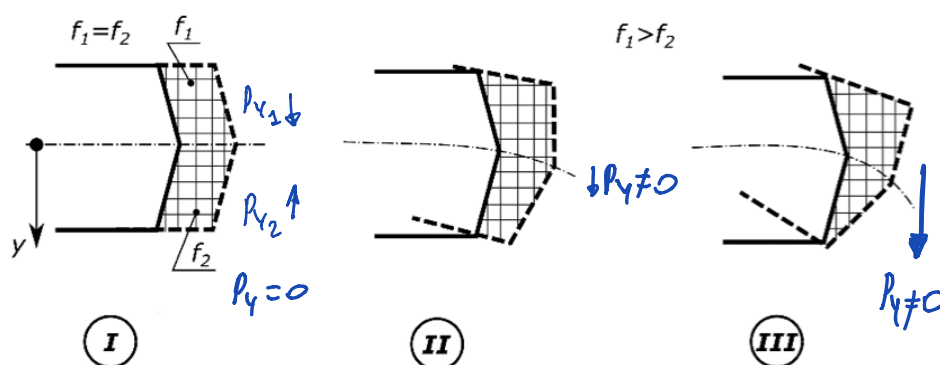
$$f_1 = f_2 \Rightarrow |p_{y1}| = |p_{y2}|$$

$$p_{yz} = p_{y1} - p_{y2} = 0$$

Глубокое сверление ( $\frac{L}{D} > 10$ )  
сверлами малого диаметра



Изменение площади срезаемого слоя режущими резцами сверла





$$\text{T.k. } f_1 \neq f_2 \Rightarrow P_{Y_1} \neq P_{Y_2}$$

$\Downarrow$

$$P_Y = P_{Y_1} - P_{Y_2}$$

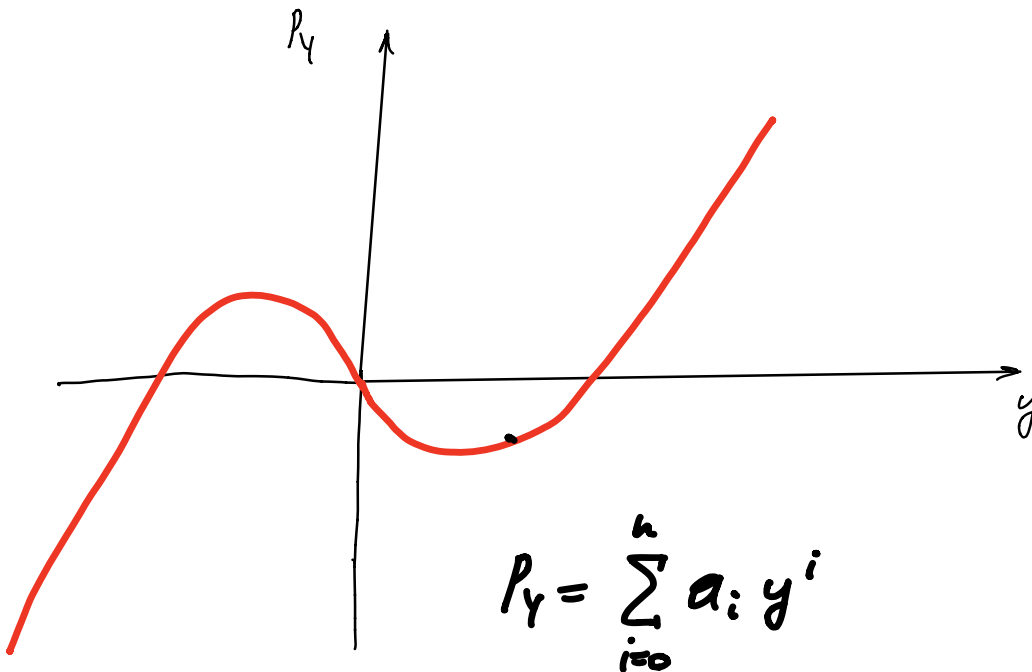
$\Downarrow$

$$P_{Y_1} = p \cdot f_1, P_{Y_2} = p \cdot f_2$$

$\Downarrow$

$$P_Y = p \cdot f_1 - p \cdot f_2 = p \cdot (f_1 - f_2)$$

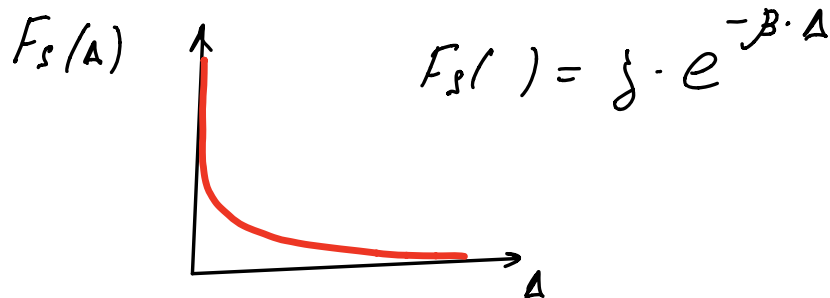
$\Downarrow$



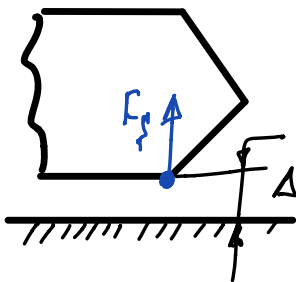
Т.е. получим следующую ММ.

$$m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + h \frac{dY(t)}{dt} + c Y(t) = \sum_{i=0}^n a_i y^i$$

Архивом или контактной взаимодействием  $F_s$



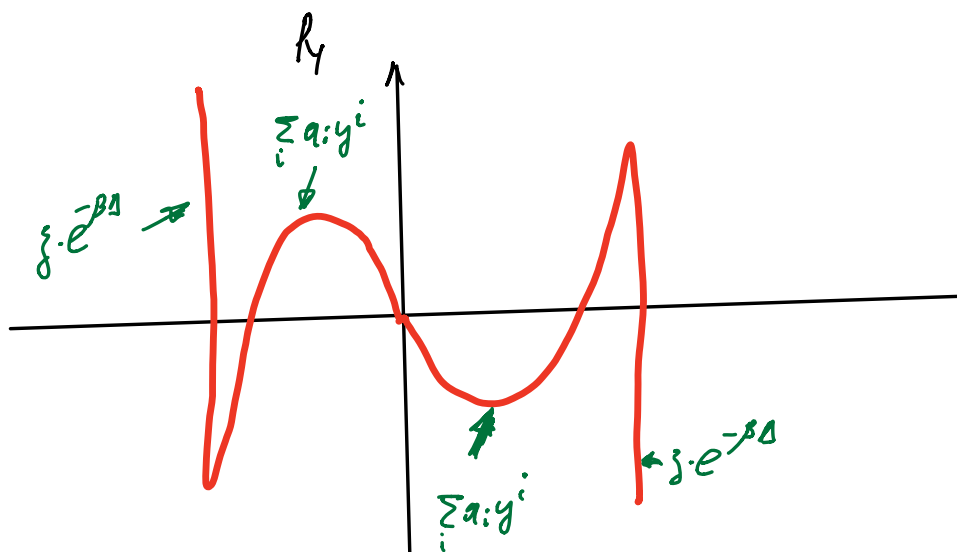
$$F_s(\Delta) = \gamma \cdot e^{-\beta \cdot \Delta}$$



$$\Delta = \Delta_0 - y$$

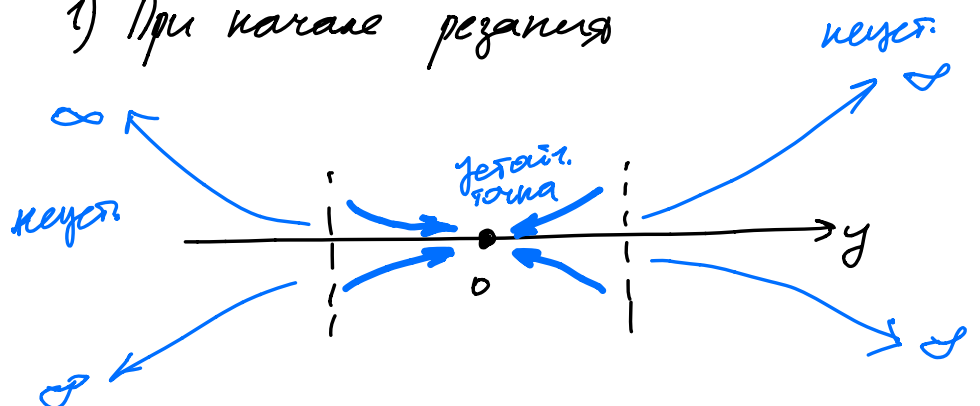
$$m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + h \frac{dY(t)}{dt} + c Y(t) = \sum_{i=0}^n a_i y^i - \xi \cdot e^{-\beta \cdot (10-y)}$$

||

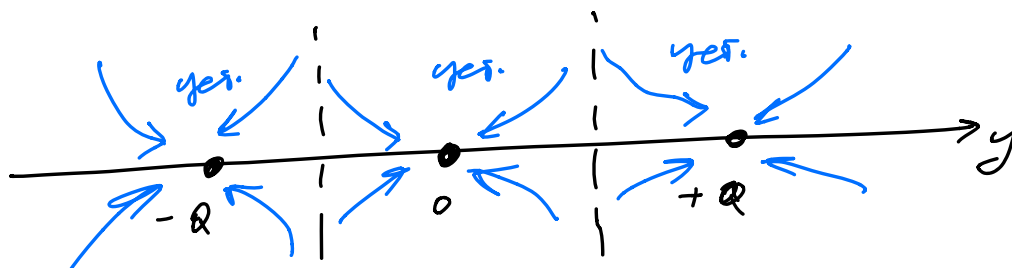


решения

1) При начале резания

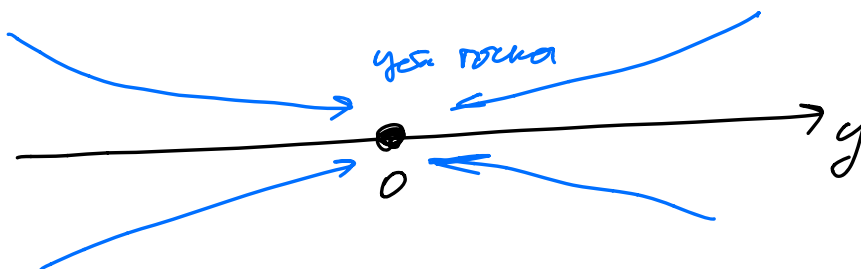


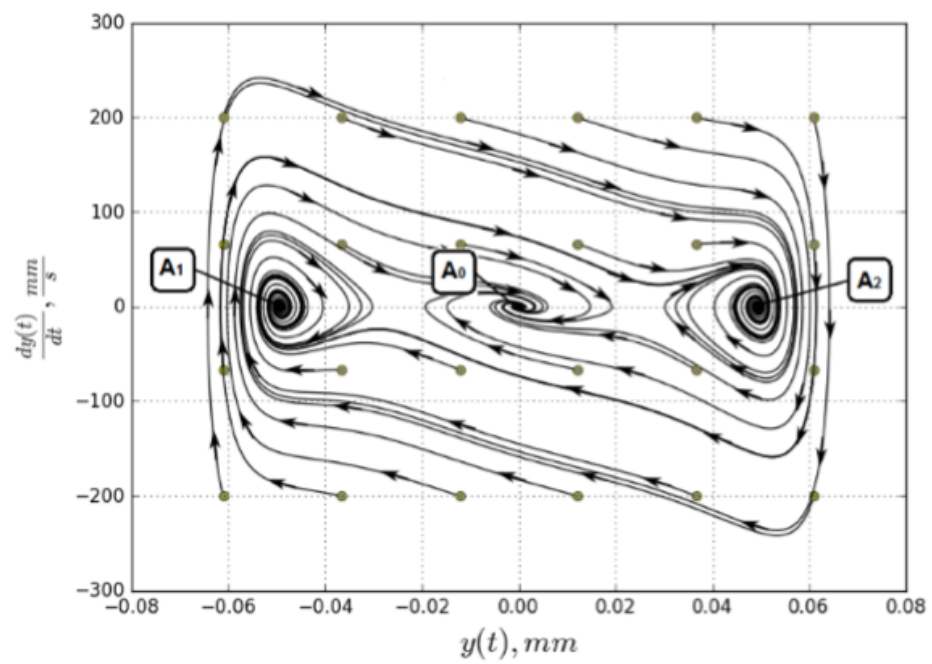
2) При „среднем“ заглублении



формирование разрывов отверстия  
или ввод инструмента

3) При значительном заглублении

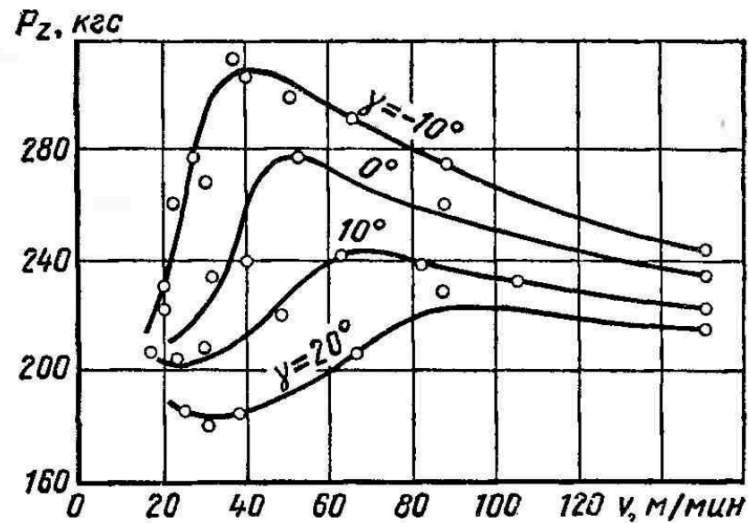




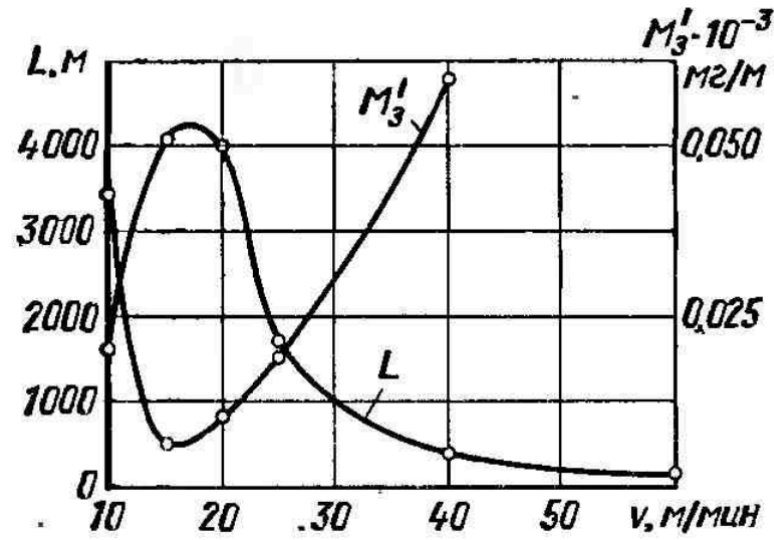
## ЛЕКЦИЯ № 05

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА РЕЗАНИЯ

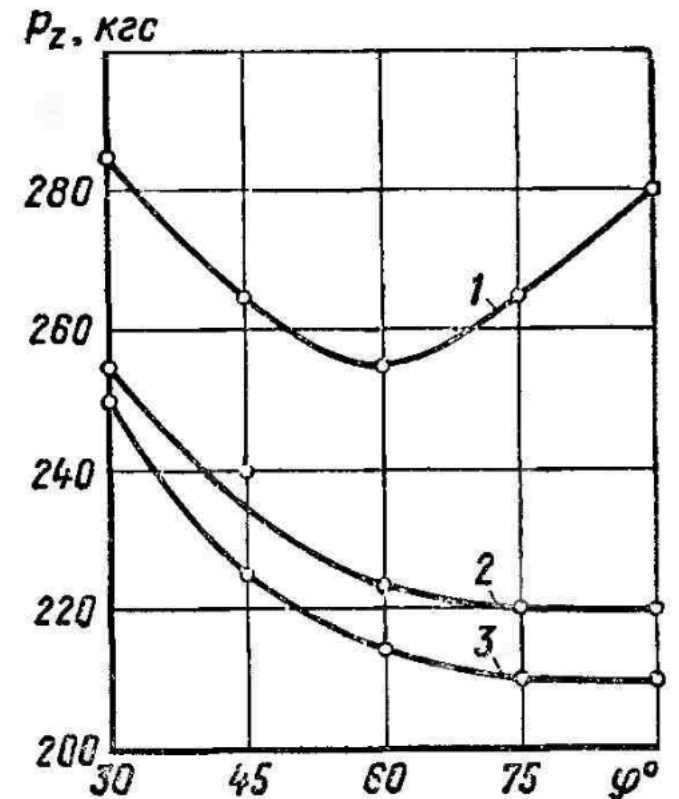
# ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА РЕЗАНИЯ



Зависимость силы резания от скорости резания

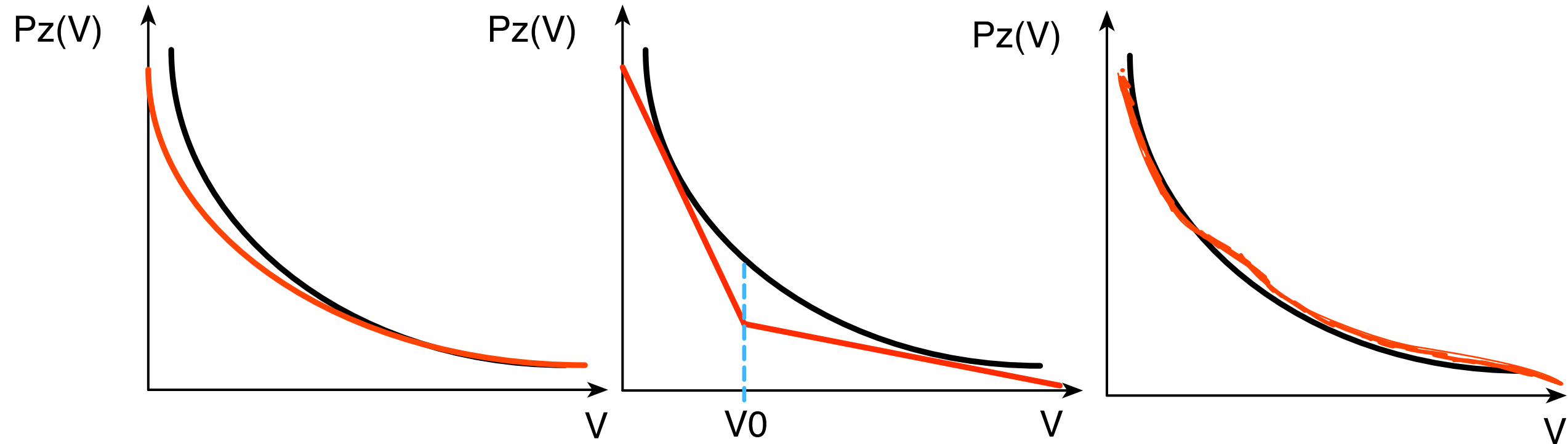


Зависимость интенсивности износа и пройденного пути от скорости резания



Зависимость силы резания от главного угла в плане

# ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ ОПИСЫВАЮЩИХ НЕЛИНЕЙНОСТЬ



1  $P_z(V) = \alpha \cdot e^{-\beta \cdot V}$

$\alpha, \beta$  — искомые параметры

+ компактность

- сложность нахождения параметров

- не всегда можно найти компактную ф-цию

2  $P_z(V) = \begin{cases} -k_1 V + b_1, & V \leq V_0 \\ -k_2 V + b_2, & V > V_0 \end{cases}$

$k_i, b_i$  — искомые параметры

- громоздкость и большое число парам.

+ простота нахождения параметров

+ всегда можно найти совокупность простых ф-ций

3  $P_z(V) = a_3 V^3 + a_2 V^2 + a_1 V + a_0$

$a_i$  — искомые параметры

средние характеристики



# ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПОЛИНОМАМИ

Полином n-ой степени

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n \cdot x^n$$

Важная задача!

Поиск значений коэффициентов  $a_n$

Полином 0-ой степени

$$y(x) = a_0$$

- описывает одну точку

Полином 5-ой степени

$$y(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Полином 1-ой степени

$$y(x) = a_1x + a_0$$

- описывает прямую

Полином 2-ой степени

$$y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

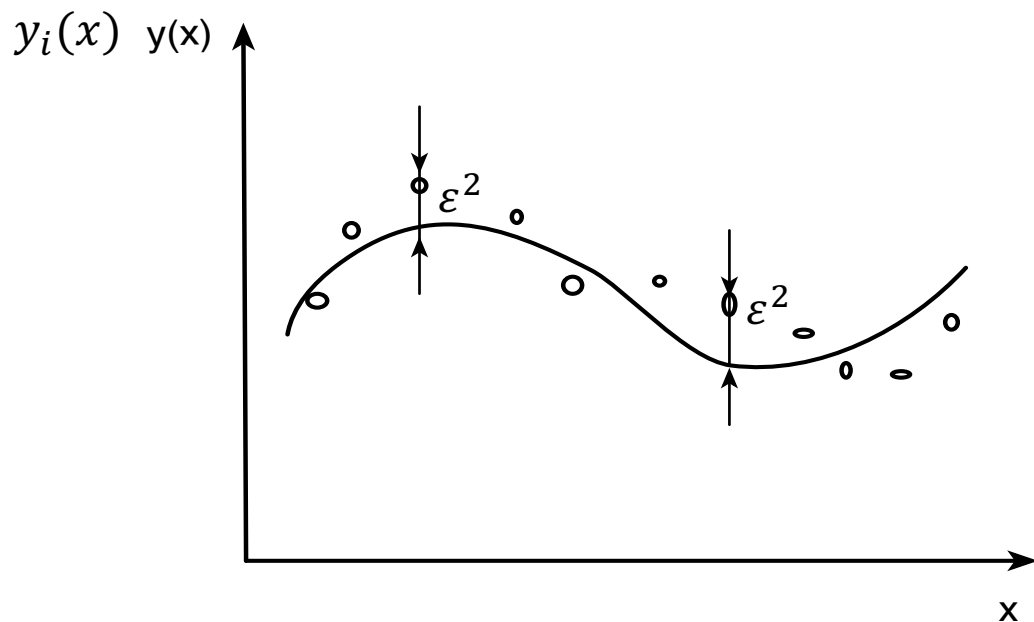
- описывает параболу

# МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

$$Q(a_i) = \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i))^2 \right] \rightarrow \min$$

$y_i$  - экспериментальная характеристика

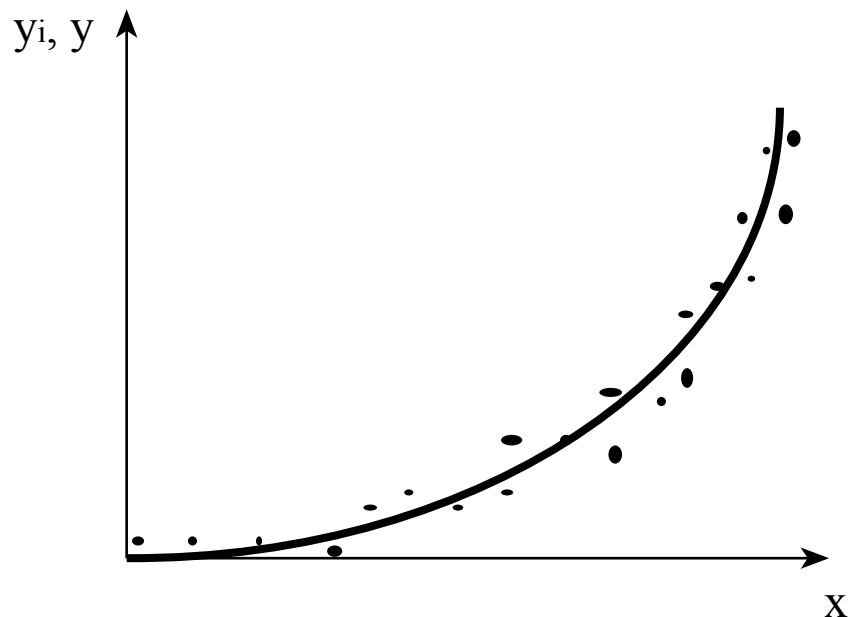
$y(x)$  – выбранный полином



Условие из которого находятся искомые  
коэффициенты полинома

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial a_N} = 0 \end{cases}$$

# ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МНК



$y_i$	$x_i$
$y_1$	$x_1$
$y_2$	$x_2$
$y_3$	$x_3$
$y_4$	$x_4$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$



$$y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$



$$Q(a_i) = \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i))^2 \right] = \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0)^2 \right] \rightarrow \min$$

Раскрываем скобки под знаком  $\sum$

$$Q(a_i) = \sum_i^N (y_i^2 - 2a_2x_i^2y_i - 2a_1x_iy_i - 2a_0y_i + a_2^2x_i^4 + 2a_1a_2x_i^3 + 2a_0a_2x_i^2 + a_1^2x_i^2 + 2a_0a_1x_i + a_0^2)$$

Находим частные производные

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_i^N (-2y_i) + \sum_i^N 2a_2x_i^2 + \sum_i^N 2a_1x_i + \sum_i^N 2a_0 = -2 \sum_i^N (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_i^N (-2x_iy_i) + \sum_i^N 2a_2x_i^3 + \sum_i^N 2a_1x_i^2 + \sum_i^N 2a_0x_i = -2 \sum_i^N (x_iy_i - a_2x_i^3 - a_1x_i^2 - a_0x_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_2} = \sum_i^N (-2x_i^2y_i) + \sum_i^N 2a_2x_i^4 + \sum_i^N 2a_1x_i^3 + \sum_i^N 2a_0x_i^2 = -2 \sum_i^N (x_i^2y_i - a_2x_i^4 - a_1x_i^3 - a_0x_i^2) = 0 \end{array} \right.$$

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_i^N y_i - \sum_i^N a_2 x_i^2 - \sum_i^N a_1 x_i - \sum_i^N a_0 = 0 \\ \sum_i^N x_i y_i - \sum_i^N a_2 x_i^3 - \sum_i^N a_1 x_i^2 - \sum_i^N a_0 x_i = 0 \\ \sum_i^N x_i^2 y_i - \sum_i^N a_2 x_i^4 - \sum_i^N a_1 x_i^3 - \sum_i^N a_0 x_i^2 = 0 \end{cases}$$

Выносим  $a_j$  за знак  $\sum$

$$\begin{cases} \sum_i^N y_i - \left( \sum_i^N x_i^2 \right) a_2 - \left( \sum_i^N x_i \right) a_1 - N \cdot a_0 = 0 \\ \sum_i^N x_i y_i - \left( \sum_i^N x_i^3 \right) a_2 - \left( \sum_i^N x_i^2 \right) a_1 - \left( \sum_i^N x_i \right) a_0 = 0 \\ \sum_i^N x_i^2 y_i - \left( \sum_i^N x_i^4 \right) a_2 - \left( \sum_i^N x_i^3 \right) a_1 - \left( \sum_i^N x_i^2 \right) a_0 = 0 \end{cases}$$

Группируем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \sum_i^N x_i^2 \right) a_2 + \left( \sum_i^N x_i \right) a_1 + N \cdot a_0 = \sum_i^N y_i \\ \left( \sum_i^N x_i^3 \right) a_2 + \left( \sum_i^N x_i^2 \right) a_1 + \left( \sum_i^N x_i \right) a_0 = \sum_i^N x_i y_i \\ \left( \sum_i^N x_i^4 \right) a_2 + \left( \sum_i^N x_i^3 \right) a_1 + \left( \sum_i^N x_i^2 \right) a_0 = \sum_i^N x_i^2 y_i \end{array} \right.$$

Получили линейную систему из трех уравнений с тремя неизвестными  $a_j$ .

Для решения данной системы можно использовать различные методы, например, представим данную систему в виде матрицы и решим её относительно неизвестных  $a_j$ .

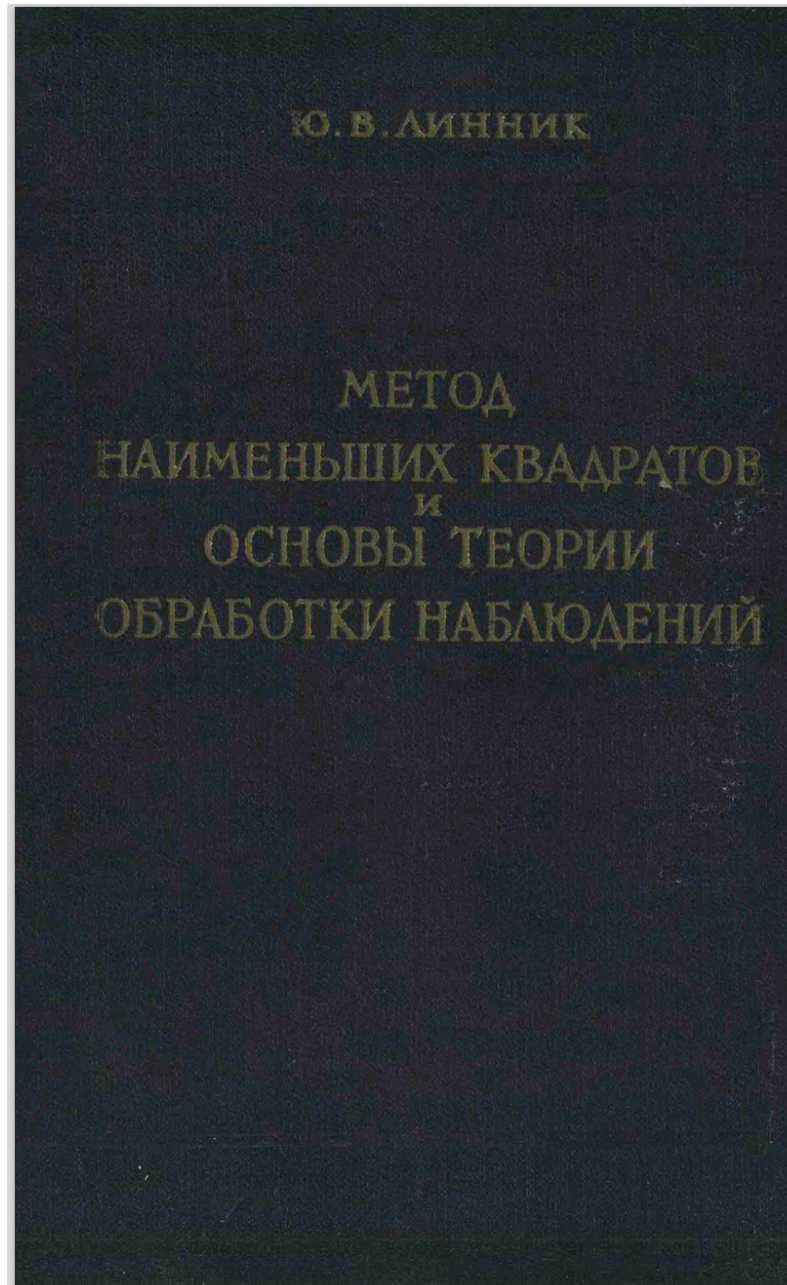
$$\begin{bmatrix} \sum_i^N x_i^2 & \sum_i^N x_i & N \\ \sum_i^N x_i^3 & \sum_i^N x_i^2 & \sum_i^N x_i \\ \sum_i^N x_i^4 & \sum_i^N x_i^3 & \sum_i^N x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^N y_i \\ \sum_i^N x_i y_i \\ \sum_i^N x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Например, можно использовать метод Крамера

$$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}$$

$\Delta, \Delta_k$  - определители в методе Крамера.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА



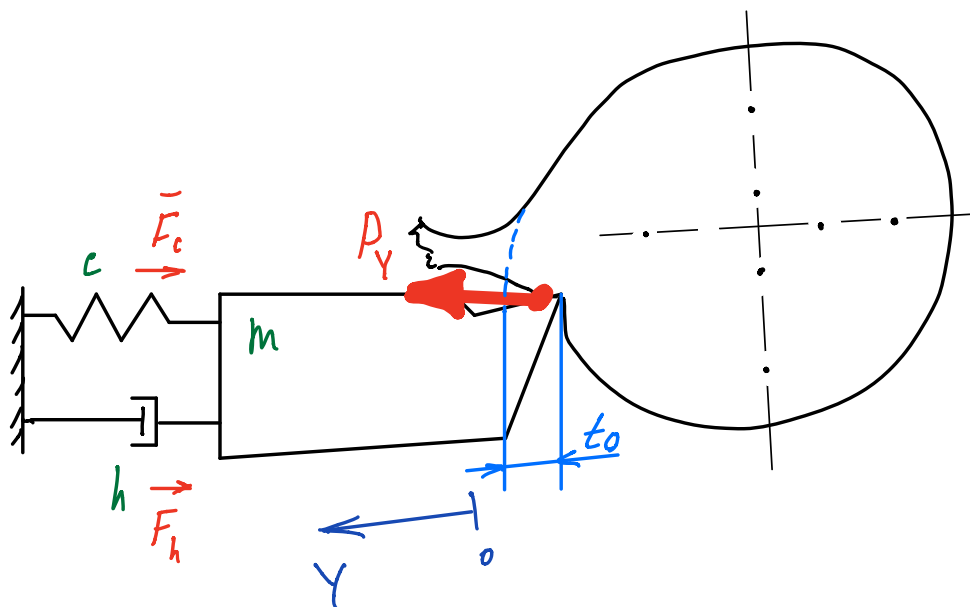


## **ЛЕКЦИЯ № 06**

**Динамическая идентификация параметров  
математических моделей технологических систем**

## Постановка задачи.

Рассмотрим простую систему течения.



$$m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + h \frac{dY(t)}{dt} + c \cdot Y(t) = P_Y(Y)$$

ММ динамики одномерного процесса  
по радиальному направлению

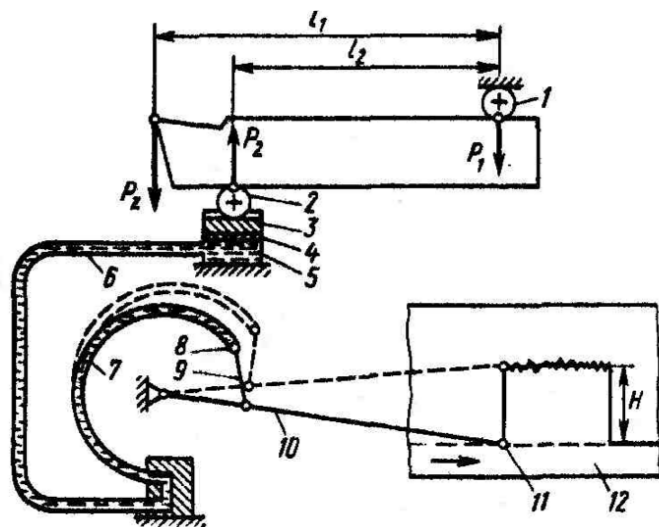
Неизвестно:  $m, h, c, P_Y(Y)$



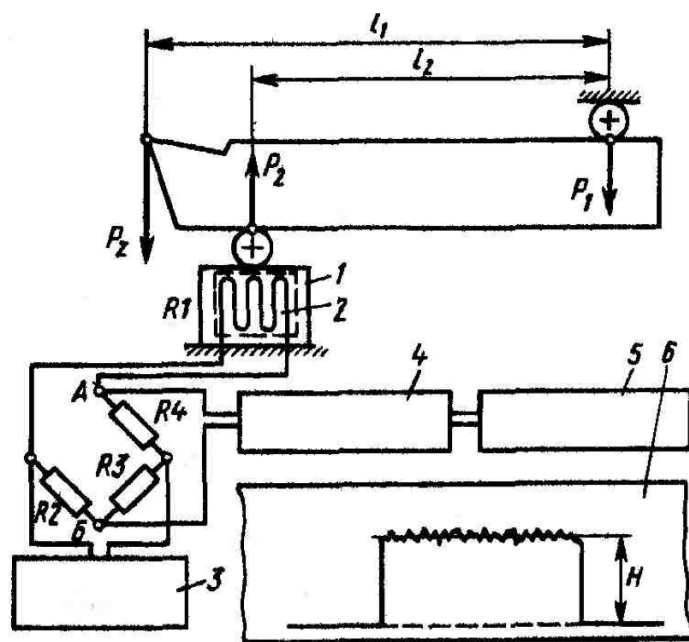
**Задача.** Требуется определить неизвестные параметры математической модели технологической системы.

# 1) Динамическая идентификация силы резания $P_y$

Измерение силы резания  $P_z$   
при помощи динамометров



Измерение тангенциальной составляющей силы резания  $P_z$  гидравлическим динамометром



Измерение тангенциальной составляющей силы резания  $P_z$  тензoeлектрическим динамометром

# ПРИМЕР СОВРЕМЕННОГО ДИНАМОМЕТРА

Источник: <http://www.ooo-technolog.ru/index.php/dynamometers.html>

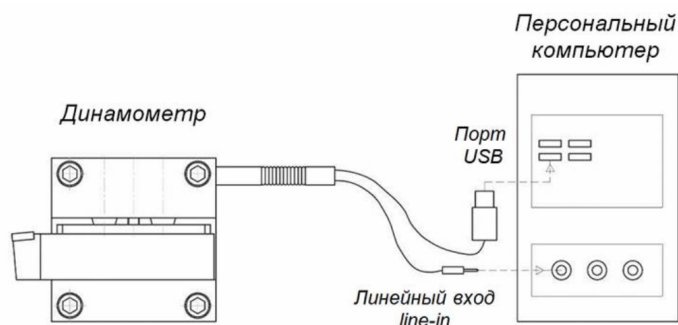
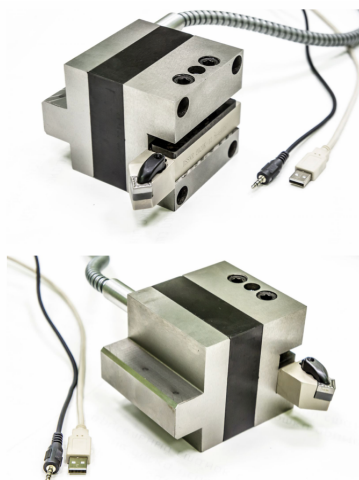
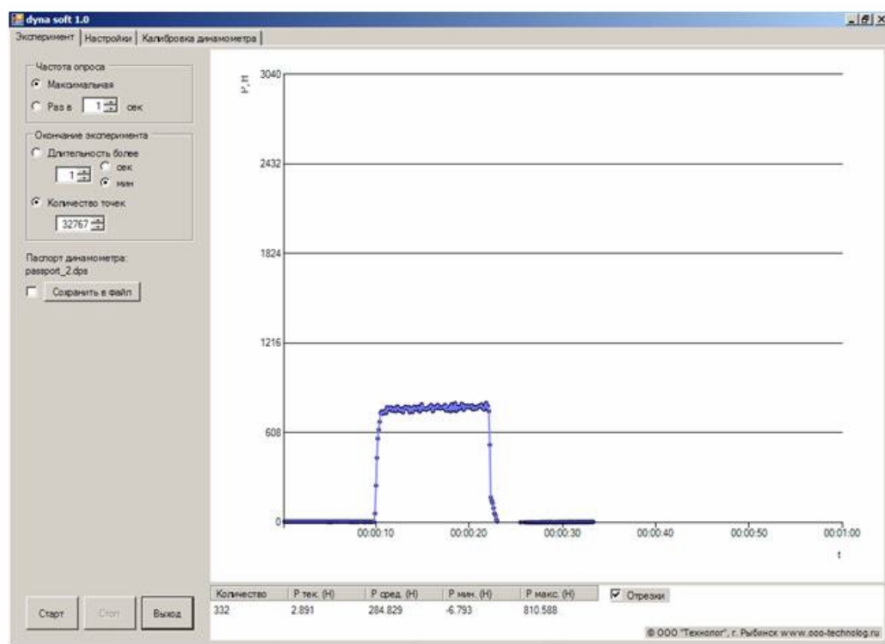


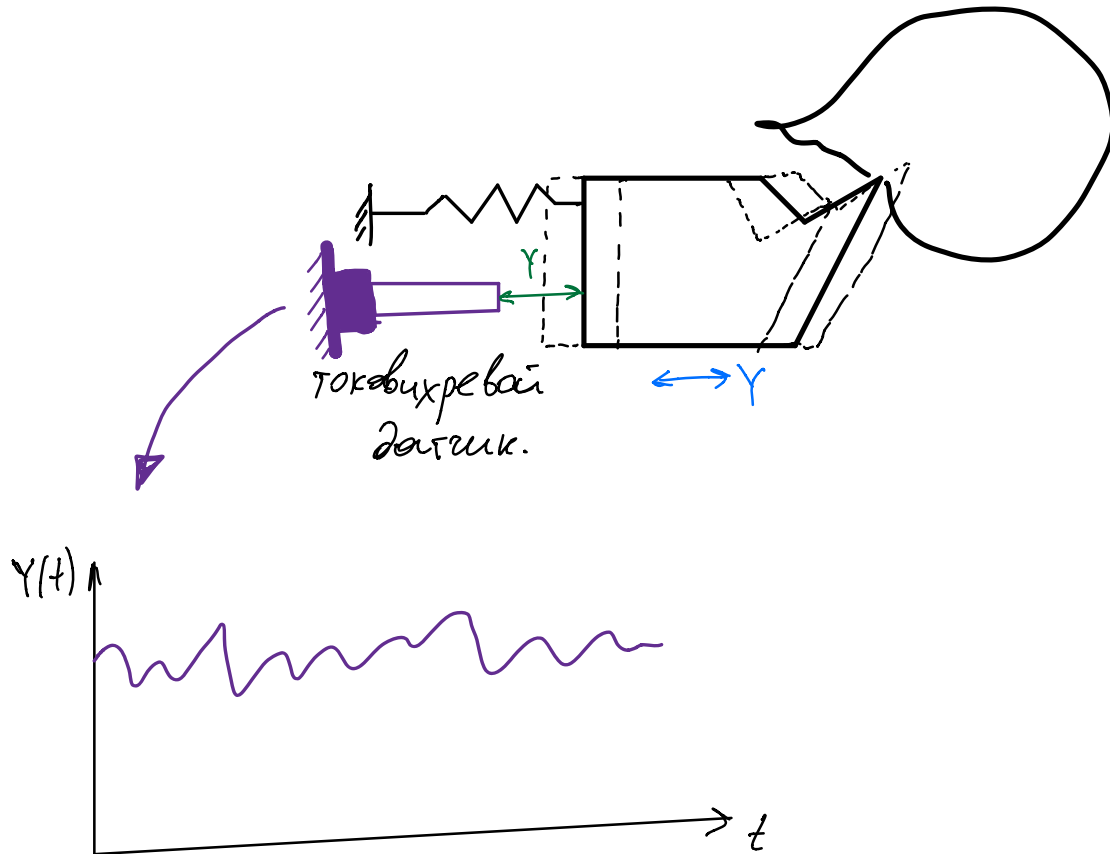
Схема подключения динамометра

Однокомпонентный динамометр  
Dyna-Z для количественной  
оценки тангенциальной  
составляющей силы резания  $P_z$



Программа сбора данных Dyna-Soft с динамометра Dyna-Z

Параллельно с измерением значения тангенциальной составляющей силы резания  $P_z$  измеряется величина перемещения подсистемы режущего инструмента в радиальном направлении.



## Пример токовихревого датчика

Источник: <http://www.startsensor.com/catalog.php?id=225>



Токовихревой  
датчик линейных  
перемещений  
SG738

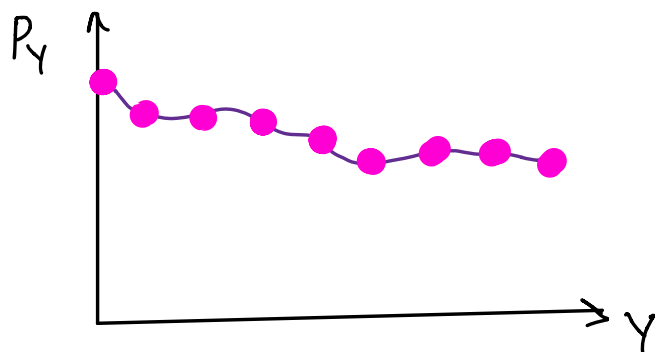
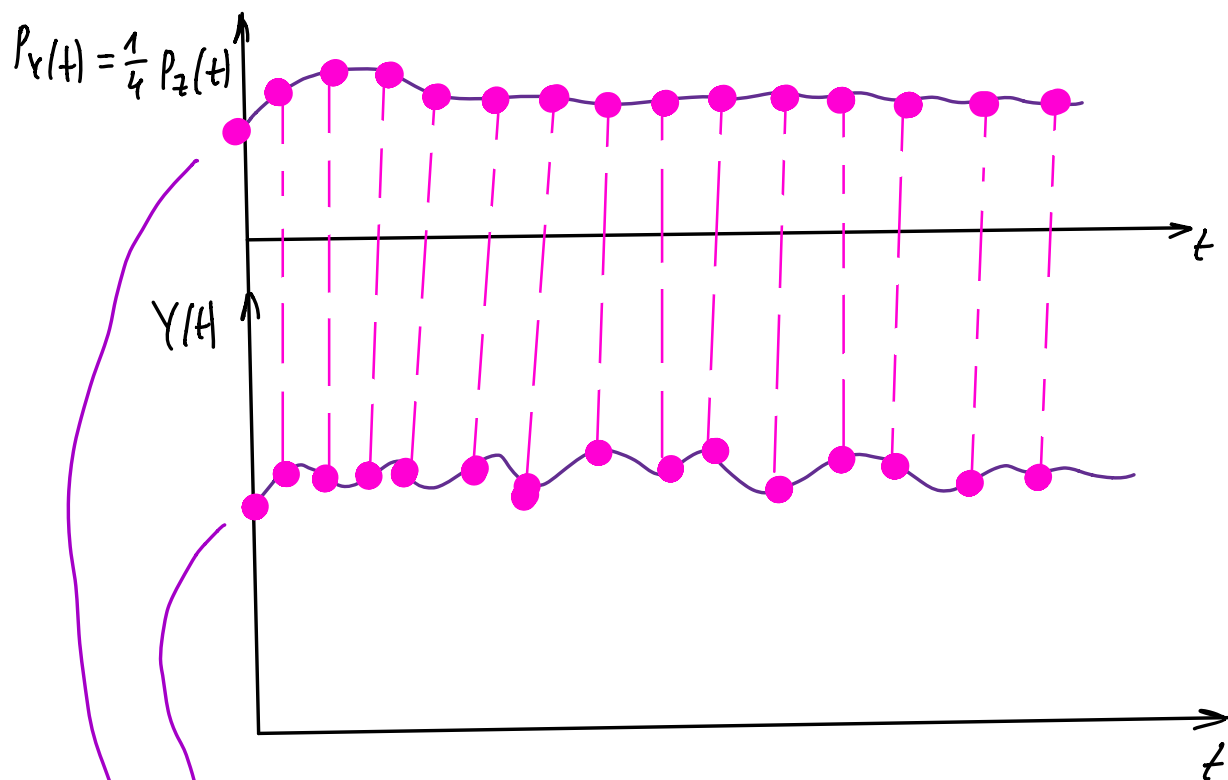
Известно, что при резании вновь заточенными резцами с углом  $\phi = 45^\circ$  имеются следующие соотношения составляющих сил резания:

$$\frac{P_x}{P_z} \approx \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{P_y}{P_z} \approx \frac{1}{4}$$

$\Downarrow$

$$P_y = \frac{1}{4} P_z$$

Совмещаем результаты измерения тангенциальной составляющей силы резания  $P_z(t)$  и перемещения подсистемы режущего инструмента  $Y(t)$



$P_{Y_i}$	300	250	310	...
$Y_i$	0,1	0,15	0,05	...

Задаётся моделью силы резания

- общий случай

$$P_Y(Y_i) = \sum_{i=0}^n a_i Y^i$$

полином  
n-ой степени.



МНК



$a_i$

имеем  
математическое  
описание силы  $P_Y(Y)$

можно перейти к частному случаю

$$P_{Y_i}(Y_i) = p_i(t_0 - Y_i) \text{ - сила резания по И.А. Тиме.}$$

$$P_{Y_i}(Y_i) = a_1 \cdot Y_i + a_0$$



Приравняем силы  $P_{Y_i}(Y_i)$

$$P_i(t_0 - Y_i) = a_1 Y_i + a_0$$

$\Downarrow$

$$P_i = \frac{a_1 Y_i + a_0}{t_0 - Y_i}$$

где:  $Y_i$  — известно из опытов

$t_0$  — заданная глубина резания

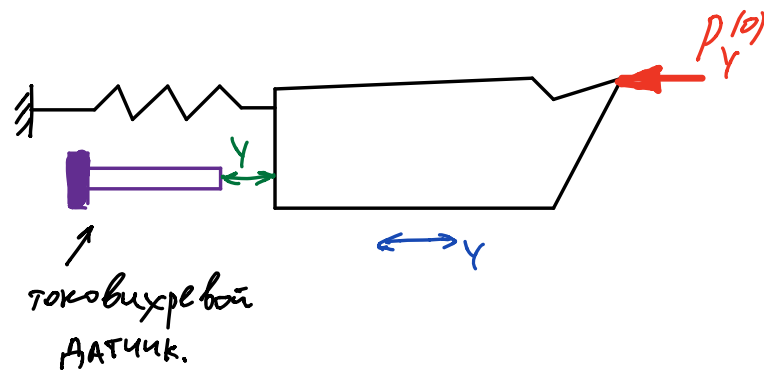
$a_1, a_0$  — получены из процедуры МНК над экспериментальными данными.

$$P_{cp} = P = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N P_i$$

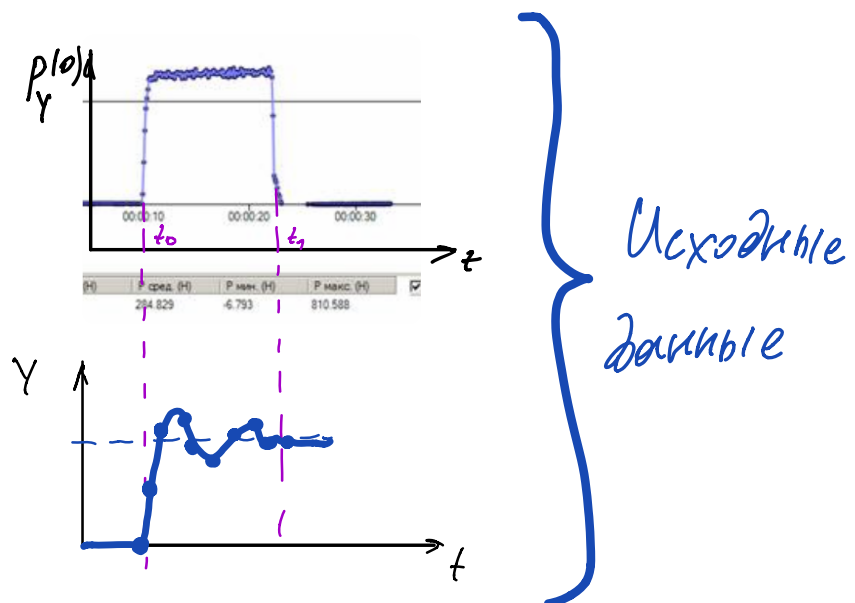
— средняя величина  $P$ .

## 2) Динамическая идентификация параметров упругой системы станка

Получение исходных данных



$P_Y^{(0)}$  — стационарное значение силы  $P_Y$ .



Выполним параметрическую идентификацию одномерной динамической системы регрессионным методом анализа дискретной математической модели системы.

$$m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + h \frac{dY(t)}{dt} + c \cdot Y(t) = P_Y^{(0)}(t)$$

← Исходная непрерывная модель

⇓

$$\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dY(t)}{dt} + \frac{c}{m} Y(t) = \frac{1}{m} P_Y^{(0)}(t)$$

обозначим:  $\tilde{a}_1 = \frac{h}{m}$ ;  $\tilde{a}_0 = \frac{c}{m}$ ;  $\tilde{b}_0 = \frac{1}{m}$ ;  $P_Y^{(0)}(t) = U(t)$

Тогда:

$$\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + \tilde{a}_1 \frac{dY(t)}{dt} + \tilde{a}_0 \cdot Y(t) = \tilde{b}_0 \cdot U(t)$$

---

Выполнив вышеприведенную замену,  
мы в дальнейшем получим разрешимую  
систему ур-ий.

---

## Переход к дискретной математической модели системы

Необходимо заменить дифференциальное уравнение аналогичным разностным уравнением.

Если период дискретизации  $T \ll T_0$  - наименьшей постоянной времени системы, то можно перейти от дифференциального ур-ня к разностному ур-ню системы, используя схему:

$$t = k \cdot T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$y(t) = y(k \cdot T) \Big|_{T=\text{const}} \Rightarrow y(k)$$

$$u(t) = u(k \cdot T) \Big|_{T=\text{const}} \Rightarrow u(k)$$

$$\boxed{\frac{dY(t)}{dt}} = \frac{\Delta Y(k, T)}{\Delta t} = \frac{\Delta Y(k)}{T} = \boxed{\frac{Y(k) - Y(k-1)}{T}}$$

$\downarrow$   
 $\Delta t = t(k) - t(k-1) = T$

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{d^2 Y(t)}{dt^2}} &= \frac{\Delta^2 Y(k, T)}{\Delta t^2} = \frac{\Delta^2 Y(k)}{T^2} = \frac{\Delta Y(k) - \Delta Y(k-1)}{T^2} = \\ &= \frac{[Y(k) - Y(k-1)] - [Y(k-1) - Y(k-2)]}{T^2} = \\ &= \frac{Y(k) - \cancel{Y(k-1)} - \cancel{Y(k-1)} + Y(k-2)}{T^2} = \\ &= \boxed{\frac{Y(k) - 2Y(k-1) + Y(k-2)}{T^2}} \end{aligned}$$

Выполняем замену:

$$\underbrace{\frac{1}{T^2} \cdot Y(k) - \frac{2}{T^2} Y(k-1) + \frac{1}{T^2} Y(k-2)}_{\approx \frac{d^2 Y(t)}{dt^2}} + \underbrace{\frac{\tilde{a}_1}{T} Y(k) - \frac{\tilde{a}_1}{T} Y(k-1)}_{\approx \tilde{a}_1 \frac{dY(t)}{dt}} + \tilde{a}_0 Y(k) = \tilde{b}_0 U(k)$$

Приведём подобные и получим разностное ур-ие:

$$Y(k) - \underbrace{\left( \frac{2 + T \cdot \tilde{a}_1}{1 + T \tilde{a}_1 + T^2 \tilde{a}_0} \right)}_{\approx A_1} \cdot Y(k-1) - \underbrace{\left( - \frac{1}{1 + T \tilde{a}_1 + T^2 \tilde{a}_0} \right)}_{\approx A_0} Y(k-2) =$$

$$= \underbrace{\left( \frac{T^2 \cdot \tilde{b}_0}{1 + T \cdot \tilde{a}_1 + T^2 \tilde{a}_0} \right)}_{\approx B_0} \cdot U(k) \quad (1)$$

Получим систему ур-ий, связывающую коэффициенты разностного ур-ия и дифференциального ур-ия.

$$\begin{cases} A_1 = \frac{2 + T \cdot \tilde{a}_1}{1 + T \tilde{a}_1 + T^2 \tilde{a}_0} \\ A_0 = -\frac{1}{1 + T \tilde{a}_1 + T^2 \tilde{a}_0} \\ B_0 = \frac{T^2 \tilde{b}}{1 + T \cdot \tilde{a}_1 + T^2 \tilde{a}_0} \end{cases}$$

уравнения  
связи параметров  
дискретной модели  
системы  $A_1, A_0, B_0$  и  
параметров непрерыв-  
ной модели системы  
 $\tilde{a}_1, \tilde{a}_0, \tilde{b}$

или

$$\begin{cases} A_1 + A_1 T \cdot \tilde{a}_1 + A_1 T^2 \tilde{a}_0 = 2 + T \cdot \tilde{a}_1 \\ A_0 + A_0 T \cdot \tilde{a}_1 + A_0 T^2 \tilde{a}_0 = -1 \\ B_0 + B_0 T \cdot \tilde{a}_1 + B_0 T^2 \tilde{a}_0 = T^2 \tilde{b} \end{cases}$$

Группируем члены ур-ий

$$\begin{cases} (A_1 - 1) \cdot T \cdot \tilde{a}_1 + A_1 \cdot T^2 \cdot \tilde{a}_0 = 2 - A_1 \\ A_0 \cdot T \cdot \tilde{a}_1 + A_0 \cdot T^2 \cdot \tilde{a}_0 = -1 - A_0 \\ B_0 \cdot T \cdot \tilde{a}_1 + B_0 \cdot T^2 \cdot \tilde{a}_0 - T^2 \cdot \tilde{b}_0 = -B_0 \end{cases} \quad \text{неизвестные}$$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} (A_1 - 1) \cdot T & A_1 \cdot T^2 & 0 \\ A_0 \cdot T & A_0 \cdot T^2 & 0 \\ B_0 \cdot T & B_0 \cdot T^2 & -T^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_0 \\ \tilde{b}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - A_1 \\ -1 - A_0 \\ -B_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Если известны коэффициенты дискретной модели  $A_0, A_1, B_0$  и период дискретизации  $T$ , можно отыскать коэффициент и непрерывной модели

$\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$  и  $\tilde{b}_0$ .



## Идентификация регрессионным методом параметров дискретной модели.

Запишем ур-ие (1)

$$Y(k) - A_1 Y(k-1) - A_0 Y(k-2) = B_0 U(k)$$

$$A_1 Y(k-1) + A_0 Y(k-2) + B_0 U(k) = Y(k)$$

Составим систему ур-ий для различных значений  $k=0, 1, 2, \dots, N$ .

$$\begin{array}{l} k=0: \\ k=1: \\ \vdots \\ k=N-2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A_1 Y(1) + A_0 Y(0) + B_0 U(2) = Y(2) \\ A_1 Y(2) + A_0 Y(1) + B_0 U(3) = Y(3) \\ \vdots \\ A_1 Y(N-1) + A_0 Y(N-2) + B_0 U(N) = Y(N) \end{array} \right.$$

Составим матрицы  $\Psi$ ,  $\chi$  и вектор целевых  $\hat{k}$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y(1) & Y(0) & u(2) \\ Y(2) & Y(1) & u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y(N-1) & Y(N-2) & u(N) \end{bmatrix}}_{\Psi} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}}_{\hat{k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y(2) \\ Y(3) \\ \vdots \\ Y(N) \end{bmatrix}}_{\chi}$$

Тогда:

$$\hat{k} = (\Psi^T \cdot \Psi)^{-1} \cdot \Psi^T \cdot \chi$$

$\Downarrow$

$$A_1, A_0, B_0$$

$\Downarrow$

по условиям (2)  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_0, \tilde{b}_0$

$\Downarrow$

$$\tilde{a}_1 = \frac{h}{m}; \quad \tilde{a}_0 = \frac{c}{m}; \quad \tilde{b}_0 = \frac{1}{m}$$

$\Downarrow$

$$m = \tilde{b}_0^{-1}; \quad c = \tilde{a}_0 \cdot m; \quad h = \tilde{a}_1 \cdot m$$

Задача:

$$1) \quad Y(0), Y(1), Y(2), \dots, Y(N)$$

$u$

$$u(0) = p_y^{(0)}(0), u(1) = p_y^{(0)}(1), \dots,$$

являются экспериментально полученными  
и дискретизированными характеристиками  
системы.

2) Чем меньше период дискретизации  
 $T$ , тем выше точность идентификации  
параметров системы.

## ЛЕКЦИЯ № 07

**Идентификация линейных моделей динамики  
технологических систем при произвольном  
детерминированом входном сигнале**

Рассмотрим вопрос определения импульсной переходной функции линейного стационарного устойчивого объекта при произвольных детерминированных сигналах методом квадратур.

Следует обратить внимание на два момента.

1. Почему именно важно найти импульсную переходную функцию (ИПФ)?

Если мы будем иметь в своем распоряжении ИПФ, то мы можем получить (рассчитать) реакцию системы на любое входное воздействие, например, на единичное ступенчатое воздействие, то есть использовать ранее рассмотренные методы идентификации динамических систем.

2. Для того чтобы выполнить идентификацию объекта нет необходимости подавать на его вход какой-нибудь из стандартных входных сигналов, а можно использовать любой произвольный входной сигнал. Это позволяет выполнять идентификацию объекта в его рабочих условиях, не проводя над идентифицируемым объектом специального эксперимента.

Рассмотрим линейный стационарный объект при следующих условиях:

- 1) отсутствует помеха  $n(t)$ , которая в общем случае искажает выходной сигнал  $x(t)$  и таким образом, является источником ошибок;
- 2) имеют место нулевые начальные условия,  $X_0 = 0$ ;
- 3) отсутствуют ошибки измерения сигналов  $y(t)$  и  $x(t)$ .

С учетом выше приведенных допущений выходной сигнал динамической системы будет определяться интегралом свертки:

$$x(t) = \int_0^t k(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

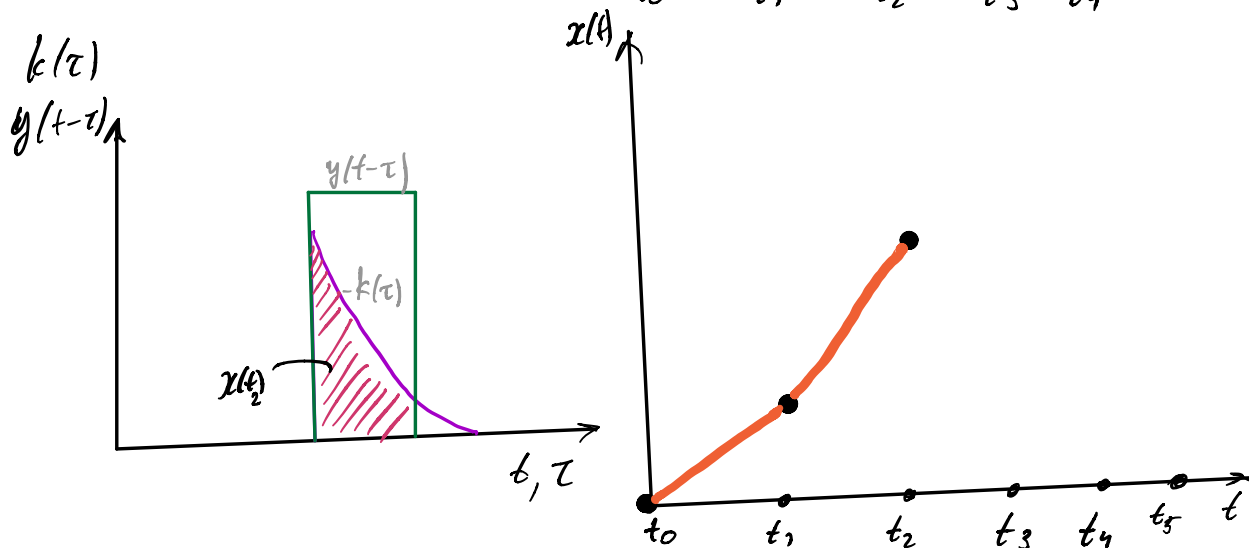
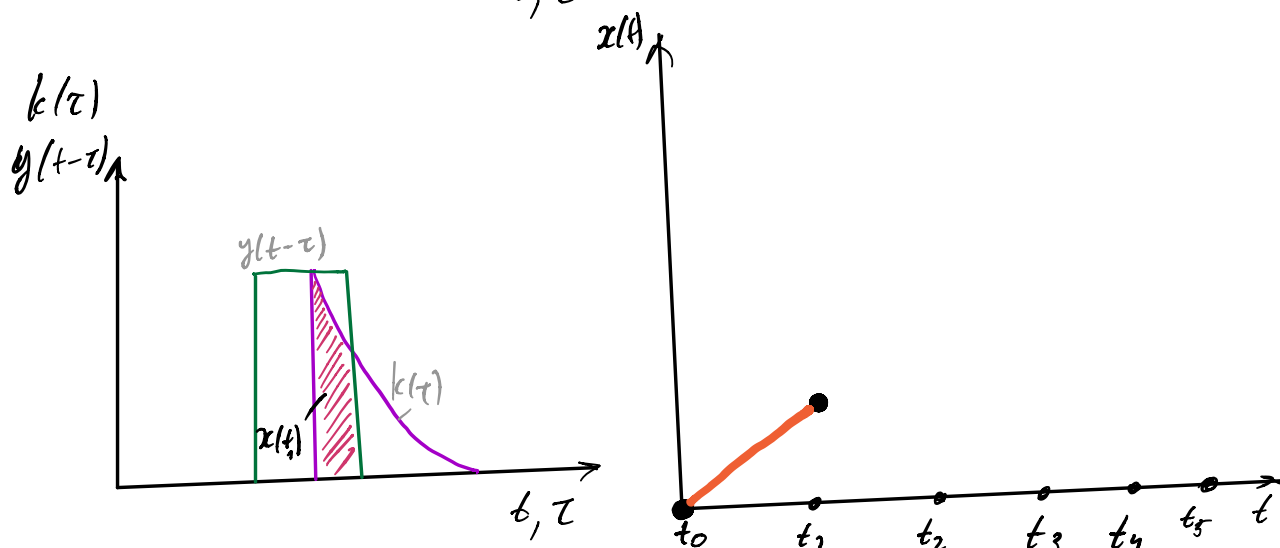
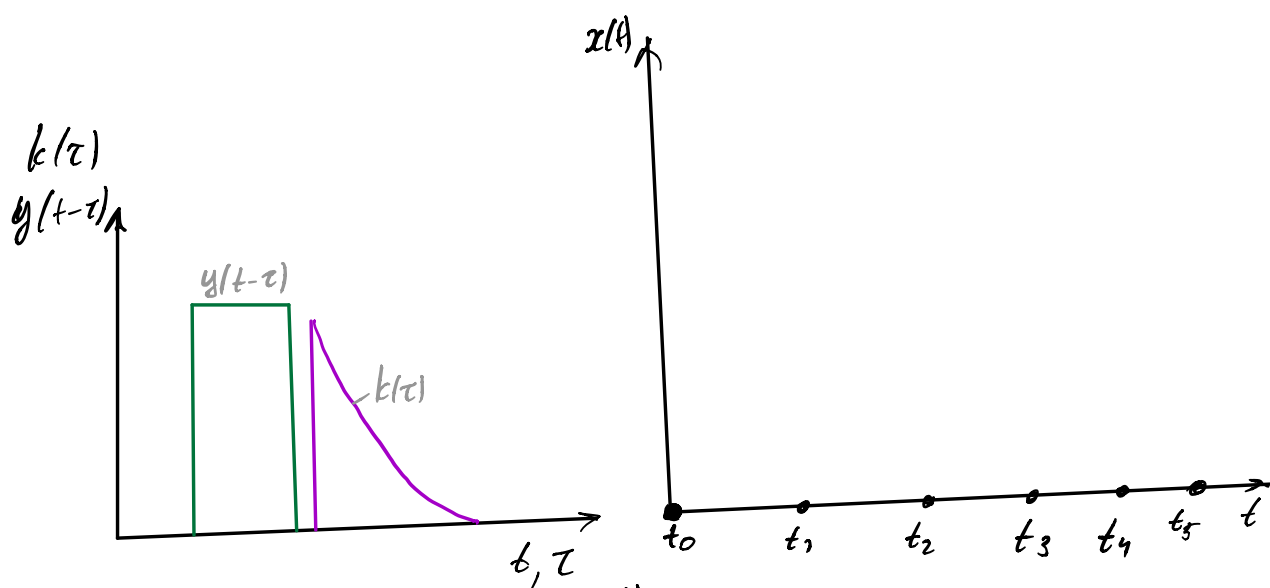
где  $k(\tau)$  – ИПФ, которую требуется идентифицировать;

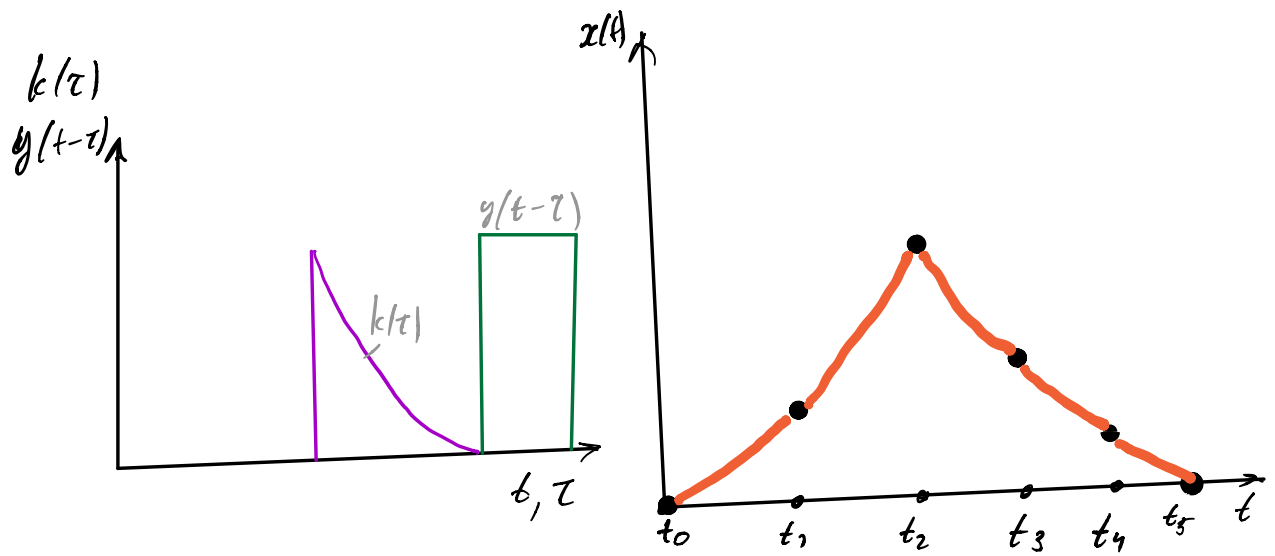
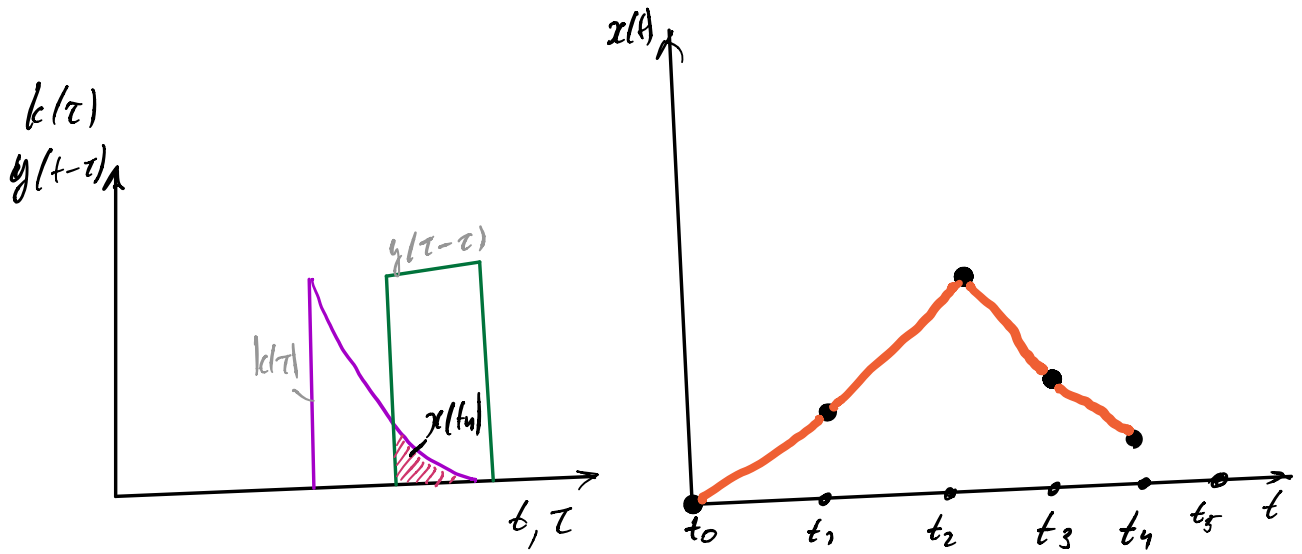
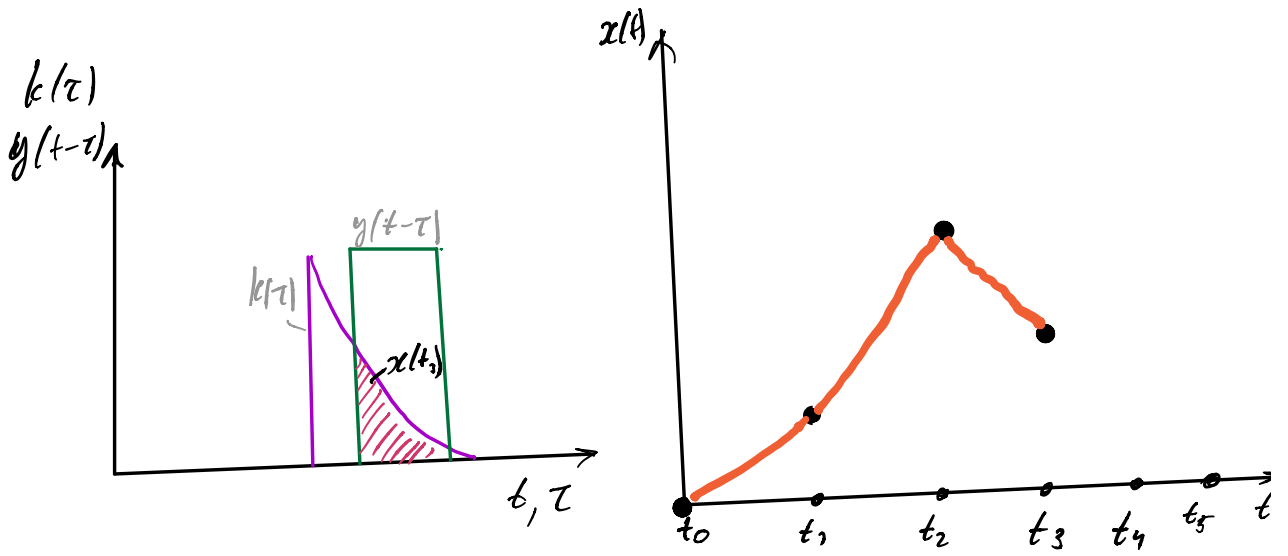
$y(t)$  – произвольный входной сигнал;

$\tau$  – время состояния объекта;

$t$  – время на которое оценивается состояние объекта.

Источник: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Свёртка\\_\(математический\\_анализ\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Свёртка_(математический_анализ))





Выполним численное интегрирование  
выражения (1) на промежутке  
 $[0, T]$  с  $n$  узлами  $t_i, i=\overline{1, n}$ ,  
используя формулу прямоугольников.

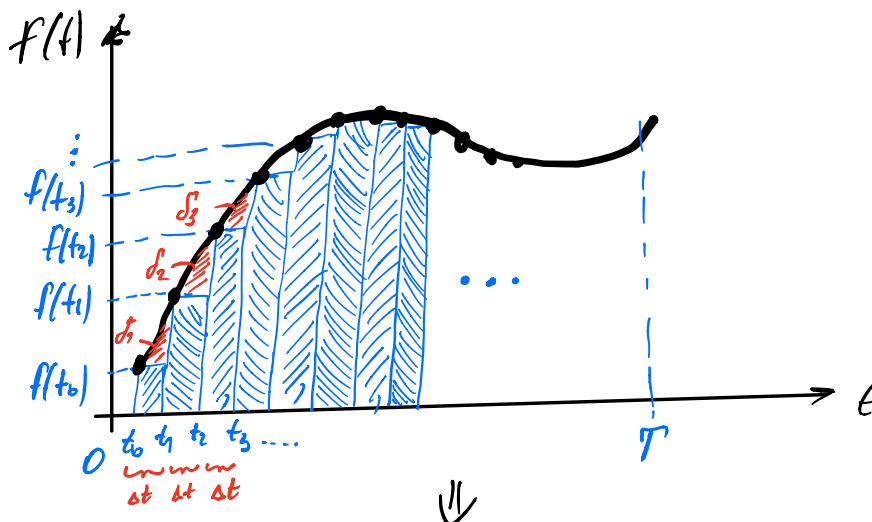
Например, Возьмём интеграл пополю  
какую-либо функцию  $f(t)$ .

$$\int_0^T f(t) dt$$

$\Downarrow$

формула прямоугольников

$\Downarrow$



$\Downarrow$



$$\int_0^T f(t) dt = f(t_0) \Delta t + f(t_1) \Delta t + \dots + f(t_{n-1}) \Delta t + \delta(f) =$$

$$= \Delta t \cdot (f(t_0) + f(t_1) + \dots + f(t_{n-1})) + \delta(f) =$$

$$= \Delta t \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) + \delta(f)$$

где  $\delta(f)$  — остаточный член.

Если мы применим формулу прямоугольников к выражению (1), то получим следующие дискретные представления интеграла (1) для дискретных точек времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$ .

$$x(t_1) = x(\Delta) = \int_0^{t_1} k(\tau) y(t_1 - \tau) d\tau = k(\Delta) \cdot y(0) \Delta + \delta_1;$$

$$x(t_2) = x(2\Delta) = \int_0^{t_2} k(\tau) y(t_2 - \tau) d\tau =$$

$$= k(2\Delta) y(0) \Delta + k(\Delta) y(\Delta) \cdot \Delta + \delta_2;$$

$$x(t_3) = x(3\Delta) = \int_0^{t_3} k(\tau) y(t_3 - \tau) d\tau =$$

$$= k(3\Delta) y(0) \Delta + k(2\Delta) y(\Delta) \Delta + k(\Delta) y(2\Delta) \Delta + \delta_3;$$

•  
•  
•

Если перенести  $\delta_i$  в левую часть после знака равенства (к  $x(t_i)$ ), то получим следующую линейную систему (2)

$$\begin{aligned}
k(1\Delta) y(0)\Delta + 0 + 0 &= x(1\Delta) - f_1; \\
k(2\Delta) y(0)\Delta + k(1\Delta) y(1\Delta) + 0 &= x(2\Delta) - f_2; \\
k(3\Delta) y(0)\Delta + k(2\Delta) y(1\Delta) + k(1\Delta) y(2\Delta) &= x(3\Delta) - f_3; \\
\vdots &\vdots \\
k(n\Delta) y(0)\Delta + k((n-1)\Delta) y(1\Delta) + k((n-2)\Delta) y(2\Delta) + \dots + \\
&+ k(1\Delta) y((n-1)\Delta) = x(n\Delta) - f_n;
\end{aligned}
\tag{2}$$

представим систему (2) в матричном виде

см.



$$\Delta \cdot \begin{pmatrix} y(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y(\Delta) & y(0) & 0 & \dots & 0 \\ y(2\Delta) & y(\Delta) & y(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y((n-1)\Delta) & y((n-2)\Delta) & y((n-3)\Delta) & \dots & y(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k(\Delta) \\ k(2\Delta) \\ k(3\Delta) \\ \vdots \\ k(n\Delta) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\Delta) \\ x(2\Delta) \\ x(3\Delta) \\ \vdots \\ x(n\Delta) \end{pmatrix} ; \quad (3)$$

Для краткости записи системы (3) введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_1 ; & k(1\Delta) &= k_1 ; \\ y(\Delta) &= y_2 ; & k(2\Delta) &= k_2 ; \\ y(2\Delta) &= y_3 ; & k(3\Delta) &= k_3 ; \\ \vdots & & \vdots & \\ y((n-1)\Delta) &= y_n ; & k(n\Delta) &= k_n ; \\ y((n-2)\Delta) &= y_{n-1} ; \\ y((n-3)\Delta) &= y_{n-2} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(\Delta) &= x_1 ; \\ x(2\Delta) &= x_2 ; \\ x(3\Delta) &= x_3 ; \\ \vdots & \\ x(n\Delta) &= x_n . \end{aligned}$$

Чем меньше шаг  $\Delta$  при аппроксимации интеграла свёртки формулой прямоугольников, тем точнее будет результат интегрирования (суммирования). Если  $\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow f_i \rightarrow 0$ .

То есть можно выбрать такое значение  $\Delta$ , при котором считать погрешности  $\delta_i$  несущественными, тогда можно принять, что

$$\delta_i = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

Тогда учитывая выше приведённые обозначения и  $\delta_i = 0$  получим систему уравнений (4) в матричной форме.

$$\Delta \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_2 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & y_2 & y_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \dots & y_1 \end{pmatrix}}_{= A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_K = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X \quad (4)$$

$$A \cdot K = X$$

$\Downarrow$

Идентифицируем ИПФ

$$K = A^{-1} \cdot X \quad (5)$$

Зная количество точек  $K$  можно рассчитать дискретные времена  $t_i$ .

$$t_1 = 0 \cdot \Delta$$

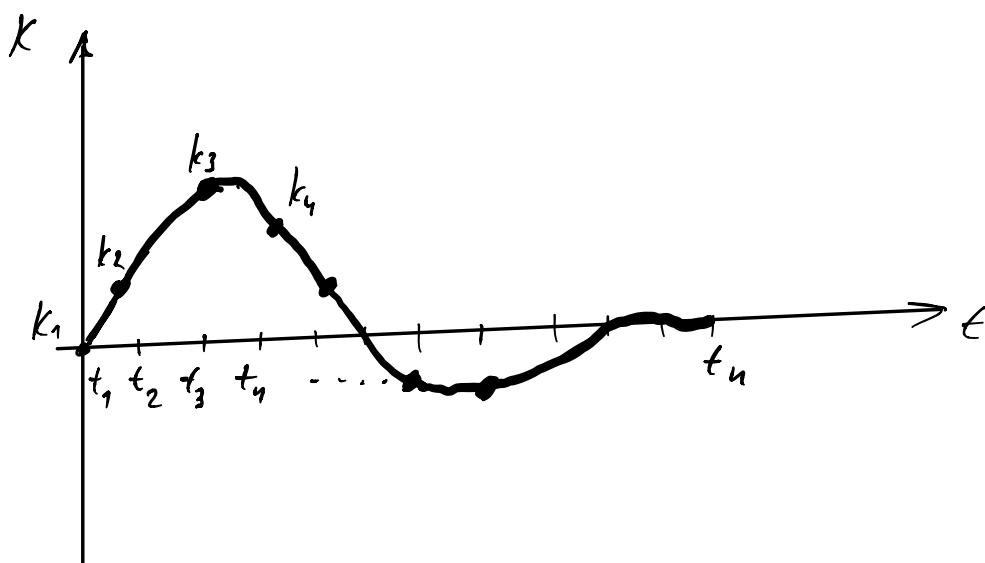
$$t_2 = 1 \cdot \Delta$$

$$t_3 = 2 \cdot \Delta$$

$\vdots$

$$t_n = (n-1) \cdot \Delta$$

И построить график ИПФ.



Теперь можно найти реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$  используя найденное значение ИИФ в виде интеграла свёртки (1) численным

$$x(t) = \int_0^t k(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

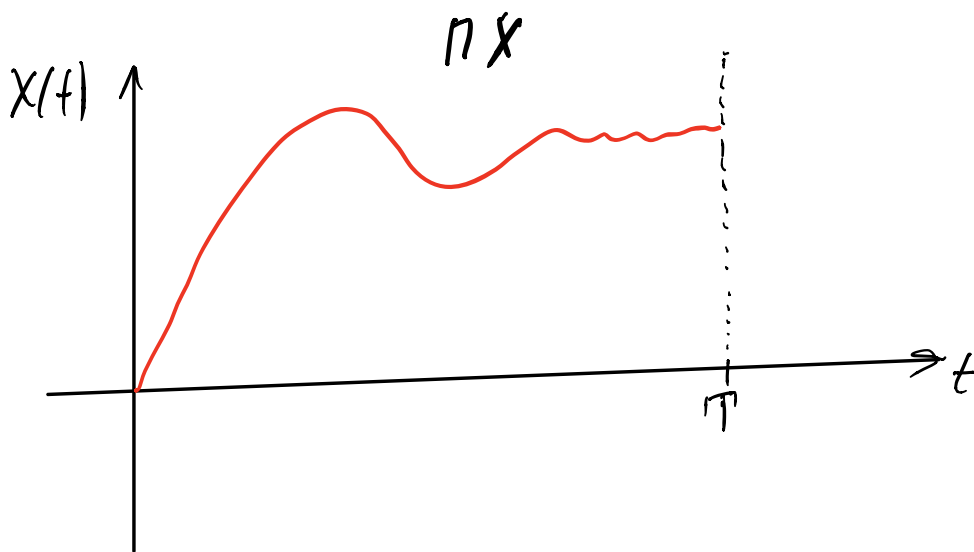


$$t \rightarrow T;$$

$$k(\tau) \rightarrow K(\tau) = \{k_1, k_2, \dots, k_n\};$$

$$y(t-\tau) \rightarrow 1(\tau)$$

$$x(t) = \int_0^T k(\tau) \cdot 1(\tau) d\tau$$



## **ЛЕКЦИЯ № 08**

**Оптимальное и адаптивное управление  
процессами резания**

## Оптимальное управление процессами резания

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; z_1, \dots, z_m) dt$$

Функционал

где :  $x_i(t)$  – выходные координаты;  
 $u_j(t)$  – управляющие воздействия;  
 $z_k(t)$  – возмущающие воздействия.

## Типовые показатели оптимальности процесса резания

- Максимальная производительность,  $J \rightarrow \max$
- Минимальная себестоимость выпускаемой продукции,  $J \rightarrow \min$
- Максимальная стойкость режущего инструмента,  $J \rightarrow \max$
- Минимальная шероховатость обработанной поверхности,  $J \rightarrow \min$
- Минимальное отклонение геометрической формы детали от заданной  
 $J \rightarrow \min$

•  
•  
•

## Типовые ограничения

- Кинематические характеристики металлорежущего оборудования  
( $V \leq V_{\max}$ ,  $L_0 \leq L_{0\max}$ )
- Максимально допустимая мощность приводов станка  
( $P \leq P_{\max} \Rightarrow t \leq t_{\max}$ )
- Вибрационные показатели станков  
( $C_{\text{ст}} \leq C_{\text{ст}\max}$ )
- Прочность режущего инструмента
- Износостойкость режущего инструмента

## Пример №1 (Выбор оптимальной $V_{opt}$ )

Цель: Требуется обеспечить максимальную производительность процесса точения  $\rightarrow \max$ .

Т.е. съём максимального объёма материала за единицу времени.

Ограничение: Износ режущего инструмента.

Управляемая координата: скорость резания  $V$ .

Постоянные координаты: глубина резания

$$t = \text{const}$$

$$t > 0$$

ходата на обрат

$$s = \text{const}$$

$$s > 0$$

$$\boxed{J = k \cdot \frac{V \cdot T}{T + t_{cm}}}$$

— показатель эффективности

↓  
max

$$t = \text{const}, t > 0 \quad | \quad !$$

$$s = \text{const}, s > 0 \quad | \quad !$$

где:  $k$  — коэффициент приведения;

$V$  — скорость резания;

$T$  — период стойкости режущего инструмента;

$t_{cm}$  — время, требуемое для замены инструмента;

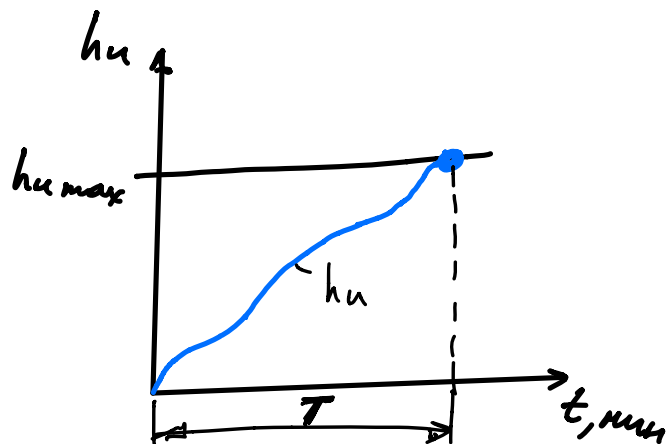
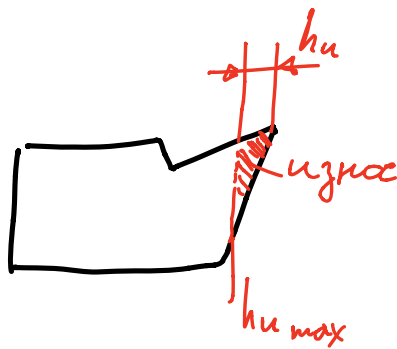
$$\text{Если } t_{cm} \rightarrow 0 \Rightarrow J = k \cdot \frac{V \cdot T}{T} = k \cdot V$$

$$\text{Если записать } J = k \cdot \frac{V \cdot T}{t_{cm}}, \text{ то}$$

$$t_{cm} \rightarrow 0 \Rightarrow J \rightarrow \infty \quad (\times)$$

Износ инструмента характеризуется его периодом стойкости  $T$

Период стойкости  $T$  — время работы инструмента, до достижения предельно допустимого износа.





Для точки:

$$T = \sqrt[m]{\frac{C_v \cdot k_v}{V \cdot t^x \cdot s^y}} \quad [ \text{с.г.м., г.2} ]$$

Если  $t = \text{const}, t > 0$

$s = \text{const}, s > 0$

то

$$T = \sqrt[m]{\frac{C_v \cdot k_v}{V \cdot t^x \cdot s^y}} \Rightarrow T = \sqrt[m]{\frac{C_{v0}}{V}}$$

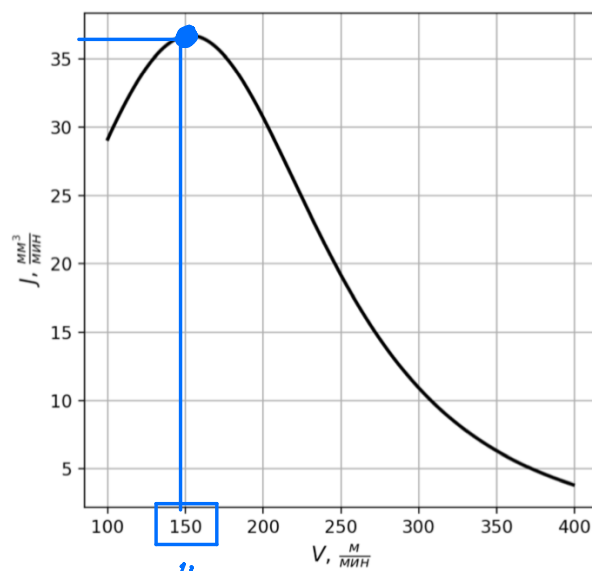
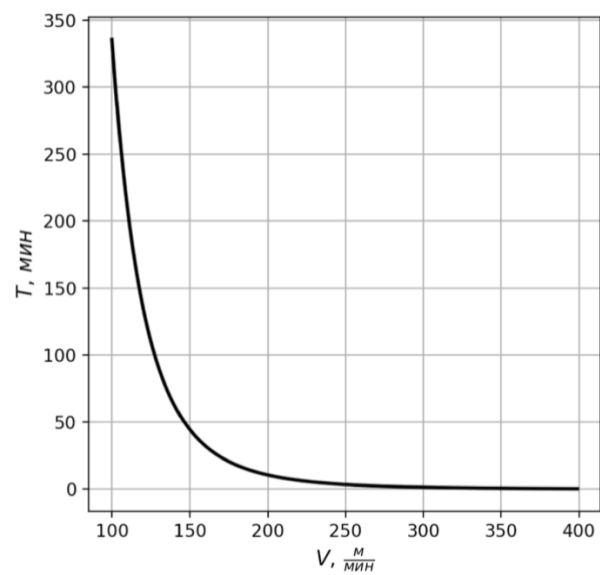
"C<sub>v0</sub>"

---

1)  $J(V, T) = k \cdot \frac{V \cdot T}{T + t_{cm}} \rightarrow \max$  функционал

2)  $T(V) = \left( \frac{C_{v0}}{V} \right)^{\frac{1}{m}}$  ограничение

3)  $V$  управляемая координата



//  
 $V_{opt}$

Пример №2 (Система адаптивного  
управления оптимальным значением  
скорости резания  $V$ )

Цель:  $J = k \frac{V \cdot T}{T + t_{em}} \rightarrow \max$

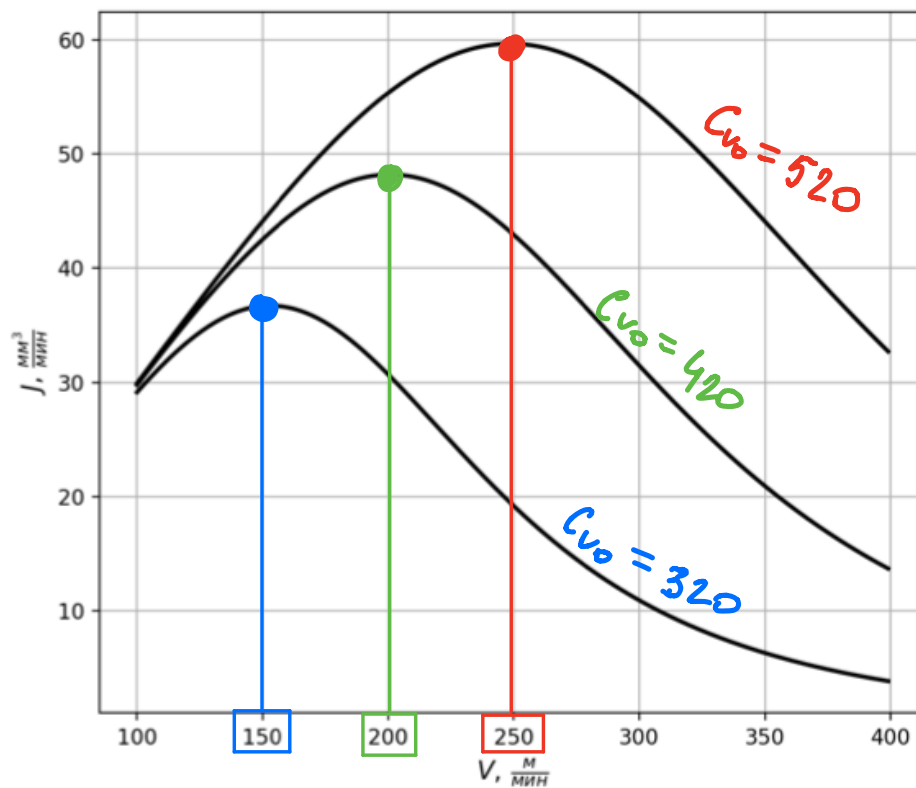
Ограничение:  $T = \sqrt[n]{\frac{C_{vo}}{V}}$

Управляемая координата:  $V$

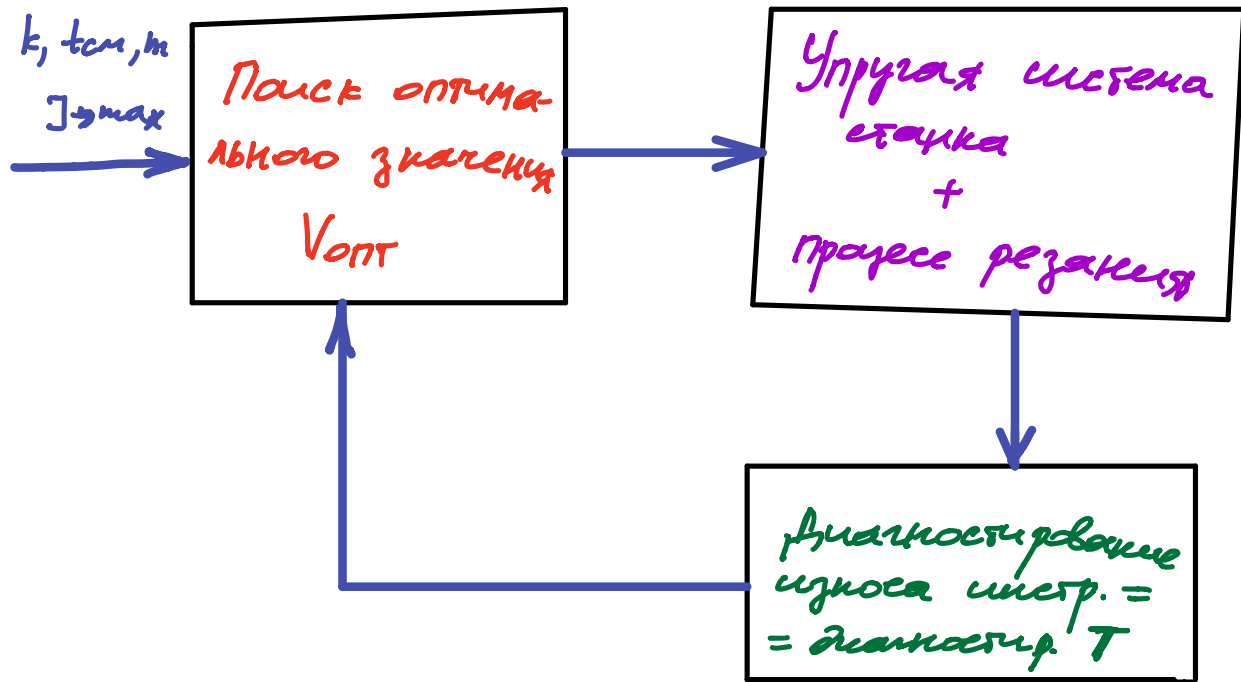
Постоянные координаты:  $t = \text{const}, t > 0$   
 $S = \text{const}, S > 0$

Параметр  $C_{vo}$  зависит от многих  
некаблюдаемых факторов и в общем  
случае является непостоянным  $C_{vo} = \text{var.}$

Тогда задача автоматического управления заключается в поиске оптимального значения  $V_{opt}$ , при  $C_{\text{об}} = \text{var}$ .

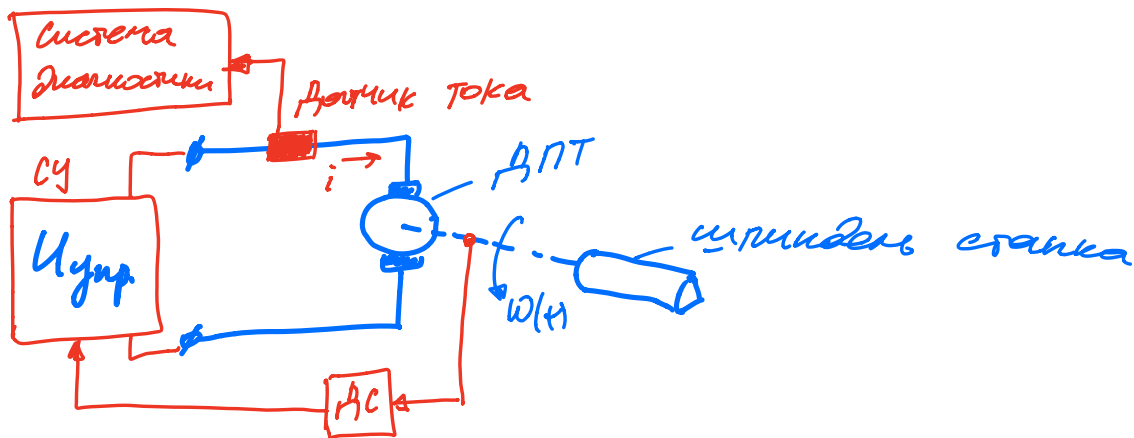


## Структура адаптивной САУ

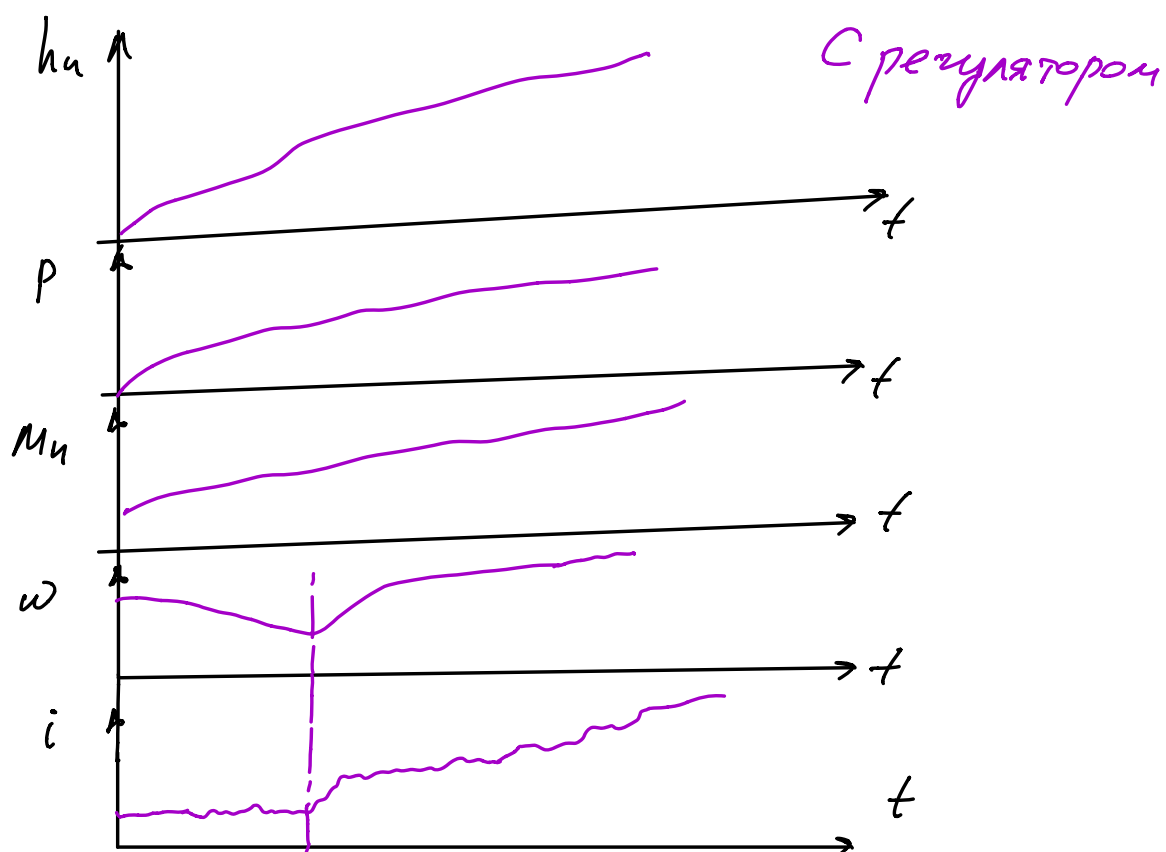
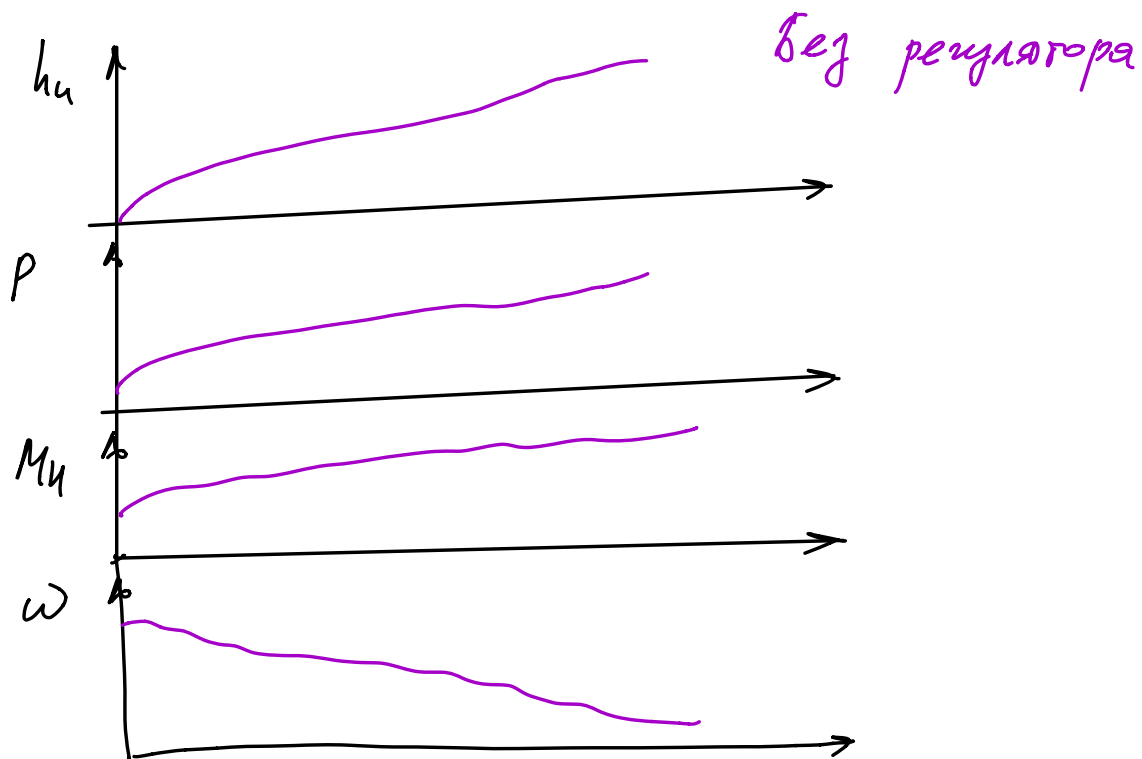


# Диагностирование износа режущего инструмента

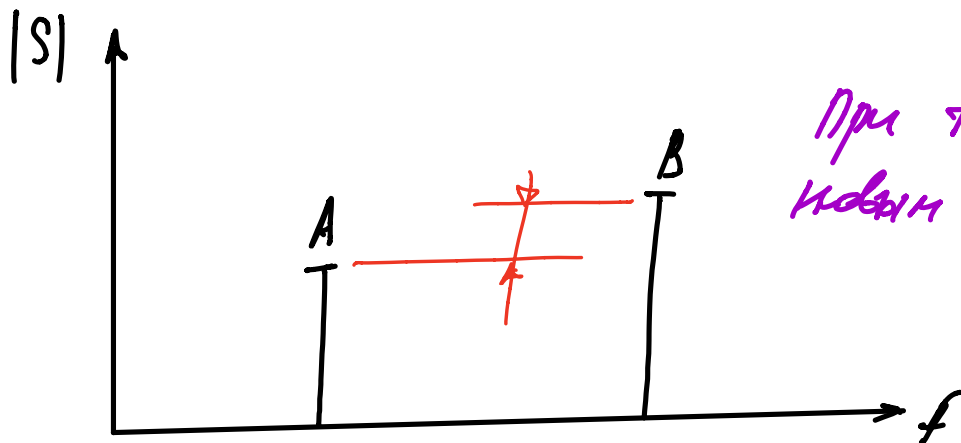
1) По <sup>(току)</sup> мощности привода главного движения



$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + i(t) = U_{\text{цирк}} - C_e \cdot \omega(t) \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} = \underbrace{C_m \cdot i(t)}_{M_d} - M_H \end{cases}$$

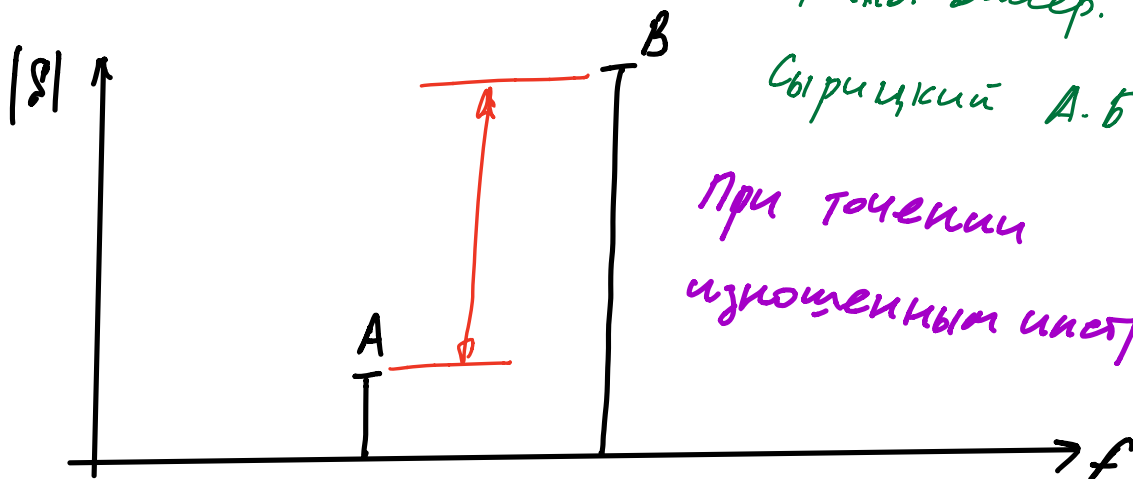


2) По спектру виброакустического сигнала



При точении  
новым инструм.

$$\xi = \frac{B}{A} \approx 1$$



Канд. диссер.

Сырицкий А. Б.

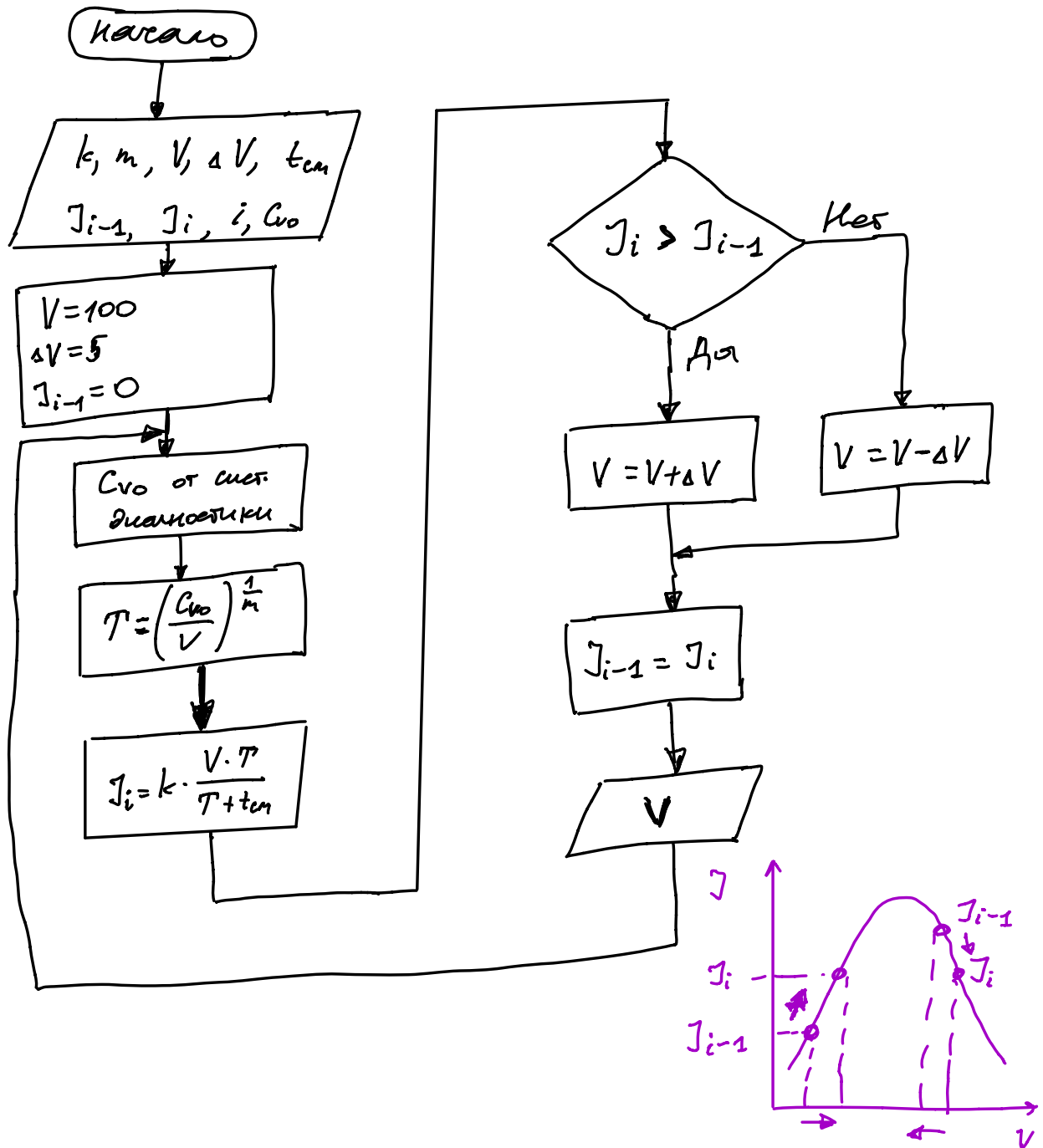
При точении  
изношенным инструм.

$$\xi = \frac{B}{A} \gg 1$$



Есть известно  $h_i$  и время  $t$ , при  
котором достигаются определённые  
значения  $h_i$ , т.е. известно  $T \Rightarrow C_{i0}$

# Алгоритм поиска оптимального значения $V_{opt}$



# Результаты работы поискового алгоритма

